دوره کامل ریاضیات دبیرستان

قربانی صفاری

نه مقاله هندسه

بخش سوم
مخروطات
حاطها

برای سال ششم ریاضی

کتابفروشی چاپخانه علی اکبر علمی

۳۰ ریال

LB
۳۰۴۸
هـ۹الف/
۱۳۳۲
متوسطه ۶
ن۱۰

کتابهای تازهٔ
قربانی - صفاری

روش حل مسائل هندسه

کتابیست که با ساده‌ترین بیان راه حل کردن مسائل
هندسه را بدانش آموزان میآموزد
دراین کتاب انواع مختلف مسائل هندسه دسته بندی
شده وضمن مثالهای متعدد روشهای مختلف برای حل
هردسته داده شده است

نه مقالهٔ هندسه

بهترین وجامع‌ترین کتاب هندسه‌ای که تاکنون
بزبان فارسی نوشته شده‌است

حل‌المسائل جبر - جلد اول

برای سالهای دوم و سوم وچهارم دبیرستان

شامل ۲۳۰۷ مسئلهٔ حل شده

کتابخانه
بسم الله الرحمن الرحیم

نه مقالهٔ هندسه

نام کتاب: نه مقاله هندسه
تاریخ ثبت در
شماره صورت: ۹۰۹۰۹
شماره مخصوص

بخش سوم

مخروطات - حاملها

برای سال ششم ریاضی

تألیف :

ابوالقاسم قربانی حسن صفاری

معلمان علوم ریاضی

شماره ثبت: ۸۲
شماره کتاب: ۱۲۹
تاریخ ثبت: ۷۸/۸/۲۹
شماره مسلسل:

هرگونه اقتباس وتقلید ازسبك این کتاب ممنوع است

کتابفروشی وچاپخانه علی اکبر علمی
تهران - خیابان ناصرخسرو - تلفن ۲۱۲۸۳ / ۳۸۷۰۹

مقدمه

استقبال بی‌نظیری که همکاران گرامی از کتابهای ریاضی ما نمودند ما را بر آن داشت که همواره در رفع نقایص کار خود کوشا باشیم و تألیف یکدورهٔ کامل کتابهای ریاضی مقدماتی را وجههٔ همت خودسازیم.

چون درضمن تألیف و تدوین کتابهای هندسه‌ای که برای سالهای اول تا پنجم دبیرستان‌ها نگاشته‌ایم برنامهٔ رسمی تحصیلات متوسطه و میزان استعداد و فهم دانش‌آموزان را در سالهای مختلف دبیرستان در نظر داشته‌ایم ناچار سبك و روش این کتابها از حیث چگونگی بیان یکسان نیست

ازاینرو در زبان فارسی تألیف یك کتاب‌هندسهٔ مقدماتی جامع که هم از لحاظ سبك یکنواخت باشد و ترتیب منطقی و طبیعی قضایا و تعاریف در آن مراعات‌شود وهم ازحیث‌صحت ودقت مطلب بتواند مورد پسند و اطمینان اهل فن قرار گیرد لازم مینمود.

کتاب نه‌مقالهٔ **هندسه** که اینك بخش سوم آن از نظر خوانندهٔ محترم میگذرد باین‌منظور نوشته شده‌است.

دراین کتاب تا آنجا که میسر بوده‌است سعی کرده‌ایم که تعاریف جامع و استدلالها روشن و مطالب دقیق باشند.

چون تعریف ناحیه‌های داخل و خارج بیضی و هذلولی و سهمی بطریقی که متداول است بیهوده مایهٔ اطناب کلام مینمود این تعریف را درضمن حل مسألهٔ مربوط بترسیم مماس از یك‌نقطهٔ معلوم بر هریك از منحنی‌های مزبور باختصار بیان کرده‌ایم.

قضایای پونسله را در مورد بیضی و هذلولی و سهمی بوجهی بیان و ثابت کرده‌ایم که استدلال درجمیع حالات صحیح‌باشد وبستگی بحاده یا منفرجه بودن برخی از زوایای شکل نداشته باشد.

دربارهٔ قضایای مربوط بتصویر دایره وبیضی و همچنین برای بیان خاصیت‌های مشترك مقطع‌های مخروطی روش تحلیلی را که ساده‌تر و طبیعی از روش هندسی است اختیار کرده‌ایم.

آرزومندیم که با نوشتن این کتاب خدمت شایسته‌ای بفرهنگ کشور و بزبان مادری خود کرده‌باشیم و این‌خدمت موردپسند صاحب نظران واقع گردد.

هرگونه انتقادی راکه دربارهٔ این کتاب خواه‌مستقیماً بمابنویسند و خواه در جراید منتشر فرمایند باحسن استقبال می‌پذیریم و از صمیم قلب از دانشمندانی که ما را بخطاهای خود واقف سازند سپاسگزار خواهیم بود.

تهران فروردین ماه ۱۳۳۲ هجری شمسی

ابوالقاسم قربانی **حسن صفاری**

نامهٔ اداره کل نگارش وزارت فرهنگ

بمؤلفین این کتاب

پیشنهاد شمارهٔ ۴۲۷۰ مورخ ۱۳۲۴/۷/۴ این اداره در پانصدمین

یکمین جلسهٔ شورای عالی فرهنگ مورخ شنبه ۱۳۲۴/۷/۲۸ مطرح و چنین رأی داده شد:

کتابهای هندسه و هیئت تألیف آقایان حسن صفاری و ابوالقاسم

قربانی شامل جمیع مواد برنامه میباشد و با اسلوبی بسیار جالب تهیه

و چاپ شده است و چون فهم تعاریف و قضایای هندسه در حدود امکان

بوسیلهٔ جمله‌های دقیق و مفید و مختصر برای دانش آموزان سهل و آسان

شده است زحمات آقایان در تهیه و تنظیم قسمتهای مختلف کتب مذکور

قابل تقدیر است.

مدیر کل نگارش

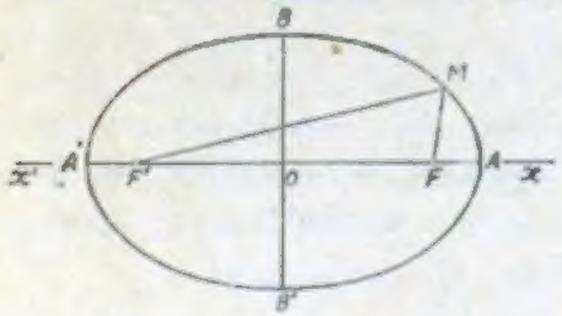
دکتر فرهمندی

بخش سوم - مخروطات و حاملها

مقالهٔ هشتم

۱ - بیضی

۸۲۱ - تعریف - در هر صفحه مکان هندسی نقاطی که مجموع فواصلشان از دو نقطهٔ معلوم واقع در همان صفحه مساوی باطول معینی میباشد یك منحنی است که آنرا بیضی مینامند.



$AA' = 2a$
$FF' = 2c$

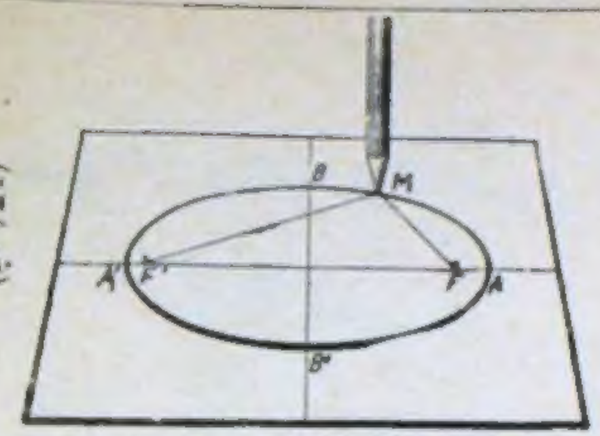
(ش ۶۳۳)

دو نقطهٔ معلوم را **کانونهای بیضی** میگویند. اگر کانونهای بیضی را F و F' و طول معین مزبور را 2a بنامیم (ش ۶۳۳) شرط لازم و کافی برای آنکه نقطه‌ای مانند M روی بیضی باشد اینست که داشته باشیم:

$$(1) \quad MF + MF' = 2a$$

هریك از قطعه خطهای MF و MF' را **شعاع حامل** نقطهٔ M و فاصلهٔ F'F را **فاصلهٔ کانونی** بیضی میگویند و این فاصله را معمولا 2c مینامند.

اگر نقطه‌ای مانند M روی خط راست F'F واقع نباشد مجموع شعاع حاملهای آن یعنی MF+MF' از 2c بزرگتر است زیرا در مثلث MFF' میتوان نوشت: $MF + MF' > FF'$



(ش ۶۳۴)

اگر دو سنجاق در نقاط F و F' نصب کنیم و دو سر نخی را گره بزنیم بطوریکه طول آن ۲c+۲a شود و نوك مدادی را بر نخ متکی کنیم و بکشیم و سپس نوك مدادرا در حالیکه به نخ کشیده‌شده متکی باشد حرکت دهیم از حرکت نوك مداد (نقطهٔ M) یك بیضی رسم میشود زیرا MF+MF' همواره مساوی با ۲a است.

اگر نقطهٔ M روی یکی از دو نیم‌خط Fx و F'x' که از امتداد دادن FF' حاصل میشود واقع باشد بازهم MF+MF' بزرگتر از ۲c است ولی اگر نقطهٔ M روی قطعه خط FF' واقع باشد (ش ۶۳۳) مجموع شعاع حاملهای آن یعنی MF+MF' با ۲c مساویست.

از آنچه گذشت معلوم‌میشود که باید ۲a را بزرگتر از ۲c اختیار کرد.

یك بیضی بادردست بودن کانونها و مجموع شعاع حاملهای یکی از نقاطش مشخص میشود.

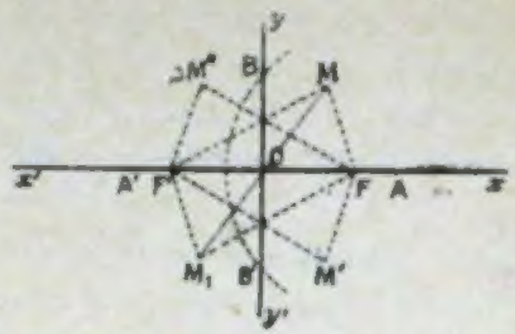
۸۳۳ - مرکز و محورها و رأسهای بیضی - فرض میکنیم F و F' کانونهای یك بیضی و ۲a مجموع شعاع‌حاملهای یکی از نقاط آن باشد. اگر نقطه‌ای مانند M روی این بیضی واقع باشد نقطهٔ M_1 قرینهٔ M نسبت بنقطهٔ O وسط قطعه خط FF' نیز روی همین بیضی واقع است (ش ۶۳۵) زیرا شکل MFM_1F' متوازی‌الاضلاع است.

و $M_1F' = MF$ و $M_1F = MF'$

وبنابراین $M_1F + M_1F' = 2a$

پس: **وسط قطعه‌خطی که دو کانون یك بیضی را بهم وصل میکند مرکز تقارن آن بیضی است.** این نقطه‌را **مرکز بیضی** میگویند.

خط راستی‌را که از نقاط F و F' میگذرد x'x و عمودمنصف قطعه خط F'F را y'y مینامیم. واضح است که نقاط M' و M'' که بترتیب قرینه‌های نقطهٔ M نسبت بخطوط x'x و y'y میباشند نیز روی بیضی واقع هستند (ش ۶۳۵) پس:



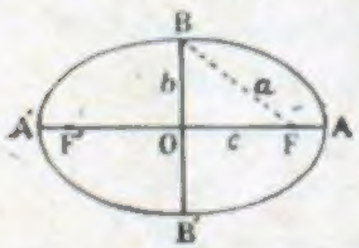
(ش ۶۳۵)

هرگاه F و F' کانونهای یك بیضی باشند خط F'F و عمود منصف قطعه‌خط F'F محورهای تقارن آن بیضی هستند.

اگر A نقطه‌ای از نیم خط Fx باشد (ش ۶۳۵) یکی از شعاعهای حامل‌این‌نقطه یعنی FA مساویست با OA−c ودیگری‌یعنی F'A مساویست با OA+c و مجموع‌ایندو شعاع حامل مساویست با ۲OA پس برای آنکه نقطهٔ A روی بیضی باشد لازم و کافیست که OA مساوی با a باشد. در اینصورت نقطهٔ A' قرینهٔ A نسبت بنقطهٔ O نیز روی بیضی‌است پس نقاط A و A' متعلق بخط راست x'x که از نقطهٔ O بفاصلهٔ a واقع هستند روی بیضی میباشند و A'A=۲a

هر نقطه که‌روی y'y (عمودمنصف قطعه‌خط F'F) واقع‌باشد از F و F' یك فاصله‌است. پس فصل‌مشترکهای‌خط y'y با بیضی نقاطی هستند که فاصلهٔ آنها از نقطهٔ F مساوی با a باشد. این نقاط عبارتند از فصل مشترکهای خط y'y با دایره‌ای که مرکزش F و شعاعش a باشد. این دو نقطه‌را B و B' وطول قطعه‌خط BB' را ۲b مینامیم. از مثلث‌قائم‌الزاویهٔ BOF نتیجه میشود:

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}$$



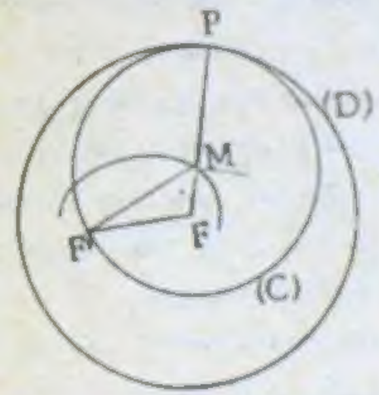
(ش ۶۳۶)

قطعه خط A'A را **محور اطول** بیضی و قطعه خط B'B را **محور اقصر** بیضی و نقاط A و A' و B و B' را **رأسهای بیضی** مینامند. گاهی

قطعه خط A'A وهمچنین خط راست AA' را **محور کانونی** نیز میگویند.

تبصره- اگر قطعه‌خطهای AA' و BB' برحسب وضع وطول معلوم باشند (ش ٦٣٦) بیضی مشخص است ودراینصورت کانونهای بیضی عبارتند ازفصل مشترکهای محور اطول یادایره‌ای که مرکزش B و شعاعش OA باشد.

٨٢٣ - دایره‌های هادی بیضی - فرض میکنیم F و F' کانونهای یك بیضی و 2a مجموع شعاع حاملهای یکی از نقاط آن باشد. اگر نقطهٔ M روی این بیضی واقع باشد و شعاع حامل MF را از طرف M بطول MP مساوی با MF' امتداد دهیم (ش ٦٣٧) طول قطعه‌خط FP مساوی با 2a میشود و نقطهٔ P روی دایره‌ای که بمرکز F و شعاع 2a رسم شود واقع است. این دایره را (D) مینامیم. واضح است که اگر بمرکز M وبشعاع MF' دایره‌ای رسم کنیم این دایره از نقطهٔ P میگذرد و در این نقطه با دایرهٔ (D) مماس میشود.



(ش ٦٣٧)

برعکس فرض میکنیم M مرکز دایره‌ای مانند (C) باشد که از نقطهٔ F' بگذرد و با دایرهٔ (D) مماس باشد. چون نقطهٔ F' درداخل دایرهٔ (D) واقع است دایرهٔ (C) نیز در داخل دایرهٔ (D) واقع میباشد و طول خط‌المرکزین دو دایرهٔ (C) و(D) یعنی MF مساویست باتفاضل شعاعهای آنها یعنی 2a − MF' و از اینجا نتیجه میشود:

$$MF + MF' = 2a$$

یعنی نقطهٔ M روی بیضی مفروض واقع است.

دایره‌ای که مرکزش یکی از دو کانون بیضی مثلا F وشعاعش 2a باشد دایرهٔ هادی بیضی نظیر کانون F نامیده میشود. هر بیضی دو دایرهٔ هادی دارد.

از آنچه گذشت قضیهٔ زیر که خاصیت مهم بیضی را بیان میکند نتیجه میشود:

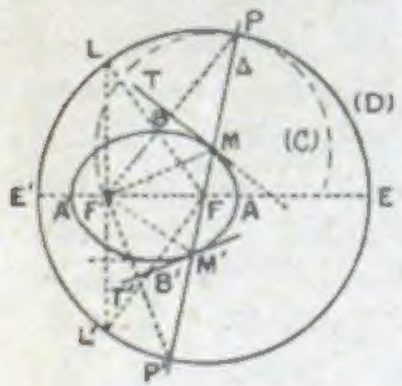
قضیه - هر بیضی مکان هندسی مراکز دایره‌هاییست که از

یکی از دو کانون آن بگذرند و با دایرهٔ هادی نظیر کانون دیگر بیضی مماس باشند.

تبصره - اگر یك دایره مانند (D) و نقطه‌ای مانند F درداخل آن در نظر بگیریم نظر باستدلال فوق:

مکان هندسی مراکز دایره‌هایی که با دایرهٔ معلوم (D) مماس باشند واز نقطهٔ F که در داخل دایرهٔ (D) واقع است بگذرند یك بیضی است نقطهٔ F یکی از کانونهای این بیضی ودایرهٔ (D) دایرهٔ هادی نظیر کانون دیگر آن میباشد.

٨٢٤ - ترسیم بیضی بوسیلهٔ نقطه‌یابی - یك نقطه مانند P روی دایرهٔ هادی (D) نظیر کانون F اختیار میکنیم (ش ٦٣٨) میتوان نقطهٔ P را نقطهٔ تماس دایرهٔ (D) با دایره‌ای مانند (C) دانست که از کانون F' بگذرد وبادایرهٔ (D) مماس شود. مرکز دایرهٔ (C) روی بیضی واقع است. این مرکز عبارتست از نقطهٔ M فصل مشترك FP با عمودمنصف قطعه‌خط F'P. وقتی نقطهٔ P دایرهٔ (D) را بپیماید نقطهٔ M روی بیضی حرکت میکند و با تغییر دادن نقطهٔ P روی دایرهٔ D میتوان نقاط مختلف بیضی را بدست آورد. نقطهٔ P از دایرهٔ هادی و نقطهٔ M از بیضی را نظیر یکدیگر مینامیم.



(ش ٦٣٨)

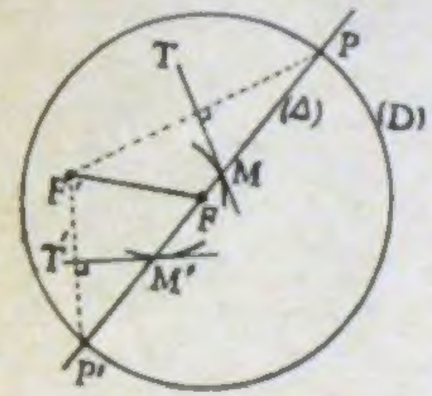
تبصره - نظیر نقاط E و E' از دایرهٔ (D) که روی خط راست FF' واقع هستند نقاط A و A' از بیضی که در وسط قطعه‌های F'E و F'E' قرار دارند حاصل میشود. این دونقطه دو انتهای قطر اطول بیضی میباشند.

نظیر نقاط L و L' از دایرهٔ (D) که روی عمود مرسوم از F' برخط F'F واقع هستند نقاط B و B' از بیضی که در وسط قطعه‌خطهای FL و FL' واقع هستند حاصل میشود. دونقطهٔ B و B' روی عمود منصف قطعه‌خط FF' واقعند و دو انتهای قطر اقصر بیضی میباشند.

وقتی نقطهٔ P قوس $\widehat{EPL}$ از دایرهٔ (D) را بپیماید نقطهٔ M روی ربع بیضی $\widehat{AMB}$ حرکت میکند. اگر نقطهٔ P کمانهای $\widehat{LL'}$ و $\widehat{E'L'}$ و $\widehat{L'E}$ از دایرهٔ (D) را بپیماید نقطهٔ M بترتیب کمانهای $\widehat{BA'}$ و $\widehat{A'B'}$ و $\widehat{B'A}$ از بیضی را خواهدپیمود.

۸۲۵ ـ فصل‌مشترك بیضی بایك‌خط راست ـ میخواهیم فصل مشترك خط راست Δ را با بیضی که دو کانونش F و F' و شعاع دایرهٔ هادیش 2a میباشد بدست آوریم. برحسب آنکه‌خط Δ ازیکی‌از دو کانون بیضی بگذرد ویا از هیچیك از دو کانون آن نگذرد دوحالت تمیز میدهیم:

حالت اول ـ خط Δ از یکی‌از کانونهای بیضی میگذرد ـ فرض‌میکنیم خط‌راست Δ از کانون F بگذرد (ش۶۳۹) وفصل‌مشترکهای خط Δ را بادایرهٔ هادی (D) نظیر کانون F نقاط P و P' مینامیم. فصل‌مشترکهای خط Δ بابیضی نقاطی از خط Δ هستند که بتوان هریك‌از آنها را مرکز دایره‌ای اختیار کرد که از کانون F' بگذرد و با دایرهٔ هادی (D) مماس باشد. نقاط تماس این‌دایره‌ها بادایرهٔ (D) ناچار نقاط P و P' هستند و نقاط تقاطع بیضی باخط Δ عبارتند ازنقاط M و M'



(ش ۶۳۹)

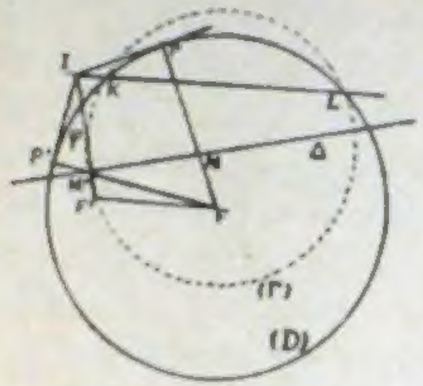
فصل‌مشترکهای Δ با عمود منصف‌های دوقطعه‌خط F'P و F'P'. از آنچه گذشت نتیجه میشود که:

هرخط راست که ازیکی‌ازکانونهای بیضی‌بگذرد بیضی‌را در دونقطه قطع میکند.

حالت‌دوم ـ خط Δ ازهیچیك ازدوکانون بیضی نمیگذرد ـ قرینهٔ‌کانون F' را نسبت بخط Δ نقطهٔ φ مینامیم. هردایره که ازنقطهٔ F' بگذرد ومرکزش روی خط Δ واقع باشد از نقطهٔ φ نیز خواهد گذشت و برعکس هر دایره که از نقاط F' و φ بگذرد مرکزش روی Δ واقع خواهد بود. پس برای تعیین فصل مشترکهای خط Δ بابیضی باید مراکز

دایره‌هایی‌را که از نقاط F' و φ میگذرند وبادایرهٔهادی (D) نظیرکانون F مماس هستند تعیین‌کنیم. مراکز این‌دایره‌هانقاط تقاطع خط Δ بابیضی هستند. این مسئله را در شمارهٔ ۴۷۱ (متمم مقاله‌های سوم و چهارم) حل کرده‌ایم. در اینجا راه حل آنرا ذکر میکنیم☆:

دایره‌ای‌مانند (Γ) رسم میکنیم که مرکزش روی‌خط Δ واقع‌باشد و از نقطهٔ F' بگذرد و دایرهٔ (D) نظیرکانون F را در دونقطه مانند K و L قطع کند (این‌دایره از نقطهٔ φ نیزخواهد گذشت) (ش۶۴۰) خطوط راست KL و F'φ یکدیگر را در نقطه‌ای‌مانند I قطع‌میکنند. ازنقطهٔ I مماسهای IP و IP' را بر دایرهٔ هادی (D) رسم میکنیم. نقاط P و P' نقاط تماس دایره‌های مذکور بادایرهٔ هادی (D) هستند ومراکز این دایره‌ها از طرفی روی خط Δ و از طرف دیگر روی FP و FP' واقعند. پس اگر فصل مشترك FP رابا Δ نقطهٔ M و فصل‌مشترك FP' را با Δ نقطهٔ M' بنامیم نقاط M و M' نقاط‌تقاطع‌خط Δ بابیضی‌هستند.



(ش ۶۴۰)

بحث ـ اگر نقطهٔ I در خارج دایرهٔ هادی (D) واقع باشد خط Δ بیضی را در دونقطه قطع میکند. برای‌آنکه‌نقطهٔ I در خارج دایرهٔ (D) واقع باشد لازم و کافیست که نقطهٔ تقاطع خطوط راست F'φ و KL در خارج قطعه‌خط KL واقع باشد وبرای این لازم و کافیست که نقاط F' و φ هردو روی یکی‌از دو کمان KL متعلق بدایرهٔ (Γ) واقع باشند و چون

☆ دلیل صحت این راه حل باختصار از اینقرار است:
کافیست نقطهٔ‌تماس هریك‌ازدایره‌های مزبور را بادایرهٔ هادی (D) بدست آوریم. اگریکی‌ازاین نقاط‌تماس‌مجهول‌را P بنامیم خط F'φ ومماسی که‌درنقطهٔ P بر دایرهٔ (D) رسم شود یکدیگر را در نقطه‌ای مانند I قطع میکنند و داریم $\overline{IP}=\overline{IF'}\times\overline{I\varphi}$ نقطهٔ I نسبت بدایرهٔ (D) و هردایرهٔ دیگری‌که از نقاط F' و φ بگذرد دارای یك قوت مشترك است. پس اگر دایره‌ای مانند (Γ) رسم‌کنیم که از F' و φ بگذرد ودایرهٔ (D) را در دونقطه مانند K و L قطع‌کند خط‌راست KL که محور اصلی دو دایرهٔ (D) و (Γ) است‌ازنقطهٔ I میگذرد. باین‌ترتیب نقطهٔ I ازتقاطع خطوط F'φ و KL بدست‌میآیدوبرای‌تعیین‌نقطهٔ P کافیست‌مماس IP را بردایره (D) رسم‌کنیم.

یکی از این دو کمان در داخل دایرهٔ (D) واقع است و نقطهٔ F' نیز درداخل دایرهٔ (D) قرار دارد پس لازم و کافیست که نقطهٔ φ نیز درداخل دایرهٔ (D) واقع باشد.

اگر نقطهٔ φ روی دایرهٔ (D) واقع باشد نقطهٔ I بر نقطهٔ φ منطبق است و فقط یك دایره میتوان رسم کرد که از F' و φ بگذرد و با دایرهٔ (D) مماس باشد. در اینحالت خط Δ با بیضی فقط در یك نقطه مشترك است☆. در شمارهٔ ۸۲۶ ثابت میکنیم که در اینصورت خط Δ با بیضی مماس میباشد.

حالت خاص ـ اگر Δ برمحور کانونی بیضی عمود باشد برای آنکه نقطهٔ φ در داخل دایرهٔ هادی (D) واقع باشد یعنی برای آنکه Δ بیضی را قطع کند لازم و کافیست که فصل مشترك خط Δ بامحور کانونی مابین رأسهای A و A' واقع باشد.

از آنچه گذشت نتیجهٔ زیر بدست میآید.

اولا ـ اگر نقطهٔ φ یعنی قرینهٔ کانون F' نسبت بخط Δ در داخل دایرهٔ هادی (D) نظیر کانون F واقع باشد خط Δ بیضی را در دو نقطه قطع میکند.

ثانیاً ـ اگر نقطهٔ φ در خارج دایرهٔ (D) واقع باشد خط Δ بیضی را قطع نمیکند.

ثالثاً ـ اگر نقطهٔ φ روی دایرهٔ (D) واقع باشد خط Δ فقط در یك نقطه با بیضی مشترك است.

۸۲۶ ـ خط مماس بر بیضی در یکی از نقاط آن

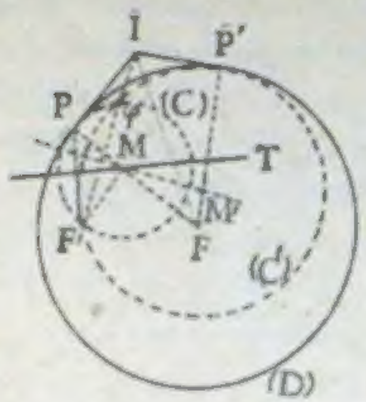
برای تحقیق آنکه در یك نقطه مانند M از بیضی خط مماس بر بیضی وجود دارد یا نه باید دو نقطهٔ مجاور M و M' را روی بیضی در نظر بگیریم و تحقیق کنیم که اگر نقطهٔ M' رفته‌رفته بنقطهٔ M نزدیك و بالاخره بر آن منطبق شود خط قاطع MM' بسمت وضع حدی میل میکند یا نه (شمارهٔ ۱۴۴ مقالهٔ دوم)

فرض میکنیم F و F' کانونهای یك بیضی و (D) دایرهٔ هادی آن بیضی نظیر کانون F باشد و دو نقطهٔ مجاور M و M' را روی این بیضی

☆ در این موردگاهی نیز میگویند که خط Δ با بیضی در دو نقطه که برهم منطبق هستند مشترك است.

در نظر میگیریم (ش ۶۴۱)

میدانیم که دایره‌های (C) و (C') که از نقطهٔ F' میگذرند و مراکز آنها نقاط M و M' میباشند با دایرهٔ (D) در نقاطی مانند P و P' مماس هستند. این دو دایره یکدیگر را در نقطهٔ دیگری مانند φ که قرینهٔ نقطهٔ F' نسبت بخط MM' است قطع میکنند. مرکز اصلی سه دایرهٔ (D) و (C) و (C') عبارتست از نقطهٔ I فصل مشترك خط F'φ بامماسهایی که در نقاط P و P' بر دایرهٔ (D) رسم شوند.



(ش ۶۴۱)

هرگاه نقطهٔ M ثابت بماند و نقطهٔ M' روی بیضی حرکت کند ورفته‌رفته بنقطهٔ M نزدیك و بالاخره بر آن منطبق شود نقطهٔ P' روی دایرهٔ (D) حرکت خواهد کرد ورفته‌رفته بنقطهٔ P نزدیك و بالاخره بر آن منطبق خواهد شد وخط FI که نیمساز زاویهٔ PFP' است بر خط FP منطبق خواهد گشت. دراینصورت نقطهٔ I بر نقطهٔ P و خط F'φ بر خط F'P منطبق خواهد شد و خط M'M که همواره عمودمنصف قطعه خط F'φ میباشد بسمت عمودمنصف قطعه‌خط F'P که آنرا T مینامیم میل خواهد کرد. نظر بتعریف مماس بر یك منحنی در یکی از نقاط آن (شمارهٔ ۱۴۴ مقالهٔ دوم) خط T در نقطهٔ M بر بیضی مماس است.

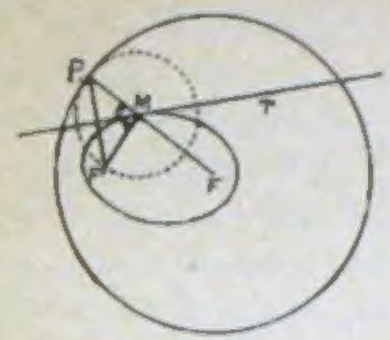
این نکته شایستهٔ دقت است که خط مماس MT خط نیمساز زاویه‌ایست که از یکی از دو شعاع حامل نقطهٔ M یعنی MF' و امتداد شعاع حامل دیگر آن یعنی MF پدید میآید (ش ۶۴۱ و ۶۴۲)

از آنچه گذشت نتیجه میشود که:

قضیه ـ درهر نقطه مانند M از بیضی یك خط مماس بر بیضی وجود دارد واین خط مماس خط نیمساز زاویه‌ایست که از یکی از دو شعاع حامل نقطهٔ M و امتداد شعاع حامل دیگر آن پدید میآید.

اگر نقطهٔ M بر یکی از رأسهای بیضی منطبق باشد مماس در آن نقطه بر بیضی برمحوری که از آن رأس میگذرد عمود است. از تقاطع چهار مماس که در چهار رأس بیضی بر آن رسم شود مستطیلی پدید میآید که ابعادش **2a** و **2b** میباشند و بیضی در این مستطیل محاط است (شکل را رسم کنید)

۸۲۷ - تبصره - طریقهٔ ترسیم بیضی بوسیلهٔ نقطه‌یابی که‌درشمارهٔ ۸۲٤ شرح دادیم دارای این خاصیت جالب توجه است که : عمود منصف قطعه‌خط F'P که از تقاطع آن با شعاع FP متعلق بدایرهٔ هادی (D) نقطهٔ M از بیضی بدست میآید خودش خط مماس بر بیضی در نقطهٔ M میباشد (ش ٦٤٢)

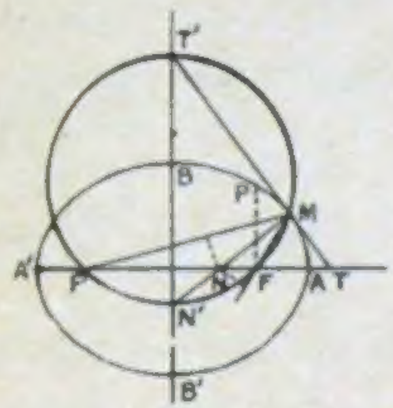


(ش ٦٤٢)

۸۲۸ - قائم بر بیضی - خط قائم بر بیضی* در یکی‌از نقاط‌آن مانند M عبارتست ازخط راستی که درنقطهٔ M برمماس MT عمود شود (ش ٦٤٣)

واضح است که خط قائم بر بیضی درنقطهٔ M نیمساز زاویهٔ دو شعاع حامل یعنی نیمساز زاویهٔ F'MF میباشد.

تمرین ۱ - تحقیق کنید که اگر فصل‌مشترکهای محورکانونی را بامماس وقائم بر بیضی در نقطهٔ M بترتیب نقاط T و N بنامیم تقسیم (TNFF') توافقی است. (ش ٦٤٣)



(ش ٦٤٣)

تمرین ۲ - نقطهٔ M را روی بیضی درنظر میگیریم و دایرهٔ محیطی مثلث MFF' را رسم میکنیم و فصل مشترکهای این دایره‌راباخط‌راست BB' نقاط T' و N' مینامیم (ش ٦٤٣) تحقیق کنیدکه یکی‌از این دو نقطه روی خط مماس و دیگری روی خط قائم بر بیضی در نقطهٔ M واقعند

خاصیت‌های خط مماس بربیضی

۸۲۹ - درشکل ٦٤٢ دیده میشود که نقطهٔ P از دایرهٔ هادی نظیر کانون F عبارتست از قرینهٔ کانون F' نسبت بخط مماس MT

برعکس قرینهٔ‌کانون F' نسبت بیک‌خط راست مانند T را نقطهٔ P مینامیم. اگر P روی دایرهٔ‌هادی نظیر کانون F واقع باشد (ش ٦٤٢)

* وبطورکلی بر هرمنحنی مسطح

شعاع FP خط T را در نقطه‌ای مانند M قطع‌میکند. نقطهٔ M روی‌بیضی است (شمارهٔ ۸۲٤) وخط T درنقطهٔ M بر بیضی‌مماس‌است (شمارهٔ ۸۲٦) از مطالب فوق قضیهٔ زیر حاصل میشود :

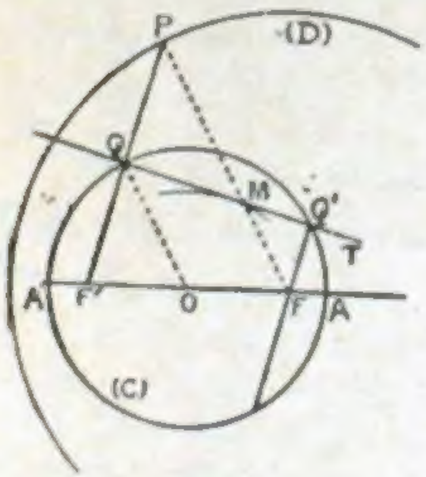
قضیهٔ ۱ - برای‌آنکه یک‌خط راست بایک‌بیضی مماس‌باشد لازم و کافیست‌که قرینهٔ یکی‌از دو کانون بیضی نسبت بآن خط روی دایرهٔ هادی نظیر کانون دیگر بیضی واقع باشد.

این قضیه را میتوان بصورت زیر نیز بیان کرد :

مکان‌هندسی‌قرینه‌های‌هریک‌ازدو کانون‌بیضی‌نسبت‌بخطوط مماس برآن عبارتست از دایرهٔ هادی نظیر کانون دیگر.

۸۳۰ - نتیجه - عمود منصف‌های قطعه‌خط‌هاییکه نقاط‌مختلف یک دایره‌را بیک‌نقطهٔ‌ثابت واقع درداخل آن‌دایره وصل‌میکنند همگی بر بیضی مماسند. دایرهٔ مزبور دایرهٔ‌هادی‌نظیر یکی‌ازدو کانون‌این بیضی‌ونقطهٔ‌ثابت مذکور کانون دیگر این بیضی میباشد.

۸۳۱ - دایرهٔ اصلی بیضی - تصویر کانون F' روی مماس MT عبارتست از نقطهٔ Q وسط قطعه‌خط F'P و اگر وسط قطعه‌خط FF' یعنی مرکز بیضی‌را نقطهٔ O بنامیم (ش ٦٤٤) وOرا به Q وصل کنیم قطعه خط OQ که‌اوساط دوضلع ازمثلث F'PF را بهم وصل میکند مساوی با نصف ضلع FP میباشد و چون FP=۲a پس OQ=a و نظر باینکه نقطهٔ O ثابت‌است وفنی نقطهٔ M روی بیضی ونقطهٔ P روی‌دایرهٔ هادی(D) نظیر کانون F حرکت کند نقطهٔQروی دایرهٔ (C) که‌مرکزش O و شعاعش a است تغییر مکان میدهد. دایرهٔ (C) را **دایرهٔ اصلی بیضی** مینامند. محور اطول بیضی یعنی A'A یکی از قطرهای این دایره است.



(ش ٦٤٤)

برعکس اگر نقطهٔ Q یکی‌ازنقاط دایرهٔ اصلی بیضی باشد وازنقطهٔ Q عمود QT را بر خط F'Q اخراج‌کنیم و قرینهٔ نقطهٔ F' را نسبت بخط

QT نقطهٔ P بنامیم واضح است که $FP = 2a$ یعنی نقطهٔ P روی دایرهٔ هادی نظیر کانون F واقع میباشد پس خط QT بر بیضی مماس است.

واضح است که عین استدلال فوق را میتوان دربارهٔ تصویر کانون F برمماس MT تکرار کرد. دراین مورد باید بجای دایرهٔ هادی نظیر کانون F دایرهٔ هادی نظیر کانون F' را درنظر بگیریم.

از آنچه گذشت قضیهٔ زیر حاصل میشود:

قضیهٔ ۴ - برای آنکه یك خط راست بایك بیضی مماس باشد لازم و کافیست که تصویر یکی از دو کانون بیضی بر آن خط متعلق بدایرهٔ اصلی بیضی باشد.

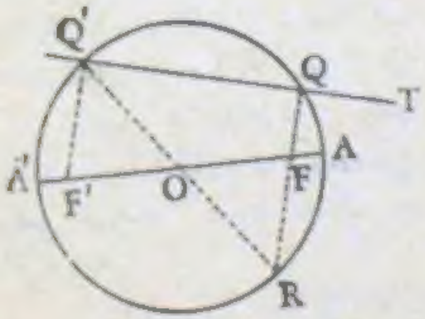
این قضیه را میتوان بصورت زیر نیز بیان کرد:

مکان هندسی تصاویر هریك از دو کانون بیضی برخطوط مماس بر آن عبارتست از دایرهٔ اصلی بیضی.

۸۳۲ - نتیجه - اگر زاویهٔ قائمه‌ای در صفحهٔ خود چنان تغییر مکان دهد که رأسش همواره روی دایرهٔ ثابتی حرکت کند و یك ضلعش همواره از نقطهٔ ثابتی واقع در داخل دایرهٔ مزبور بگذرد ضلع دیگرش بریك بیضی که نقطهٔ ثابت مزبور یك کانون آن و دایرهٔ مزبور دایرهٔ اصلی آنست همواره مماس میباشد.

۸۳۳ - قضیهٔ ۴ - حاصلضرب فواصل دو کانون هر بیضی از یکی از خطوط مماس بر آن مساویست با مربع نصف طول محور اقصر بیضی.

اگر خط T بر بیضی مماس باشد وتصاویر دو کانون F و F' را روی خط T بترتیب نقاط Q و Q' بنامیم (ش ۶۴۵) نقاط Q و Q' روی دایرهٔ اصلی بیضی واقع هستند (شمارهٔ ۸۳۱) و اگر دومین فصل مشترك خط FQ را با دایرهٔ اصلی نقطهٔ R بنامیم چون زاویهٔ $Q'QR$ قائمه است قطعه‌خط $Q'R$ یکی از قطرهای



(ش ۶۴۵)

دایرهٔ اصلی میباشد و از تساوی دو مثلث OFR و $OF'Q'$ نتیجه میشود $F'Q' = FR$ و مطابق شکل نظر بقضیهٔ شمارهٔ ۳۱۶ (مقالهٔ سوم) داریم:

$$FQ \times FR = FA \times FA' = (a-c)(a+c) = a^2 - c^2 = b^2$$

بنابراین

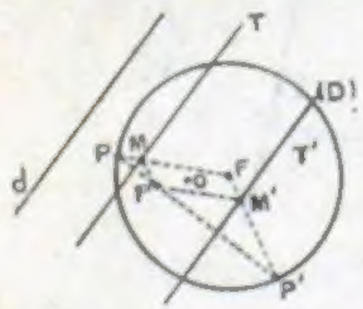
$$\boxed{FQ \times F'Q' = b^2}$$

تمرین - ثابت کنید که هرگاه دریك صفحه خط راستی چنان تغییر مکان دهد که همواره حاصلضرب فواصل دو نقطهٔ ثابت که در یك طرف خط مزبور واقعند از آن خط مساوی بامقدار ثابتی باشد این خط راست همواره مماس است بریك بیضی که دو نقطهٔ مزبور دو کانون آن و مقدار ثابت مزبور مربع نصف طول محور اقصر آنست.

مسائل مربوط بخط مماس بر بیضی

۸۳۴ - مسئلهٔ ۱ - خط راست d درصفحهٔ یك بیضی مفروض است. میخواهیم خط مماسی بموازات خط d بر بیضی رسم کنیم.

فرض میکنیم F و F' دو کانون بیضی و (D) دایرهٔ هادی نظیر کانون F باشد (ش ۶۴۶) قرینهٔ کانون F' نسبت بخط مماس مطلوب از طرفی روی دایرهٔ هادی (D) نظیر کانون F (شمارهٔ ۸۲۹) واز طرف دیگر روی عمود مرسوم از نقطهٔ F' برخط d واقع است. (زیرا مماس مطلوب با خط d موازیست) بنابراین اگر از نقطهٔ F' خطی بر d عمود کنیم و فصل مشترکهای آنرا بادایرهٔ (D) نقاط P و P' بنامیم عمودمنصف‌های دو قطعه‌خط $F'P$ و $F'P'$ یعنی دوخط T و T' مماسهای مطلوب میباشند. نقاط تماس M و M' عبارتند از فصل مشترکهای دو مماس T و T' باشعاعهای FP و FP' ازدایرهٔ هادی. چون نقطهٔ F' در داخل دایرهٔ (D) واقعست خطی که از F' بر d عمود میکنیم دایرهٔ هادی (D) را همواره در دو نقطه قطع میکند و مسئله همیشه دوجواب دارد.



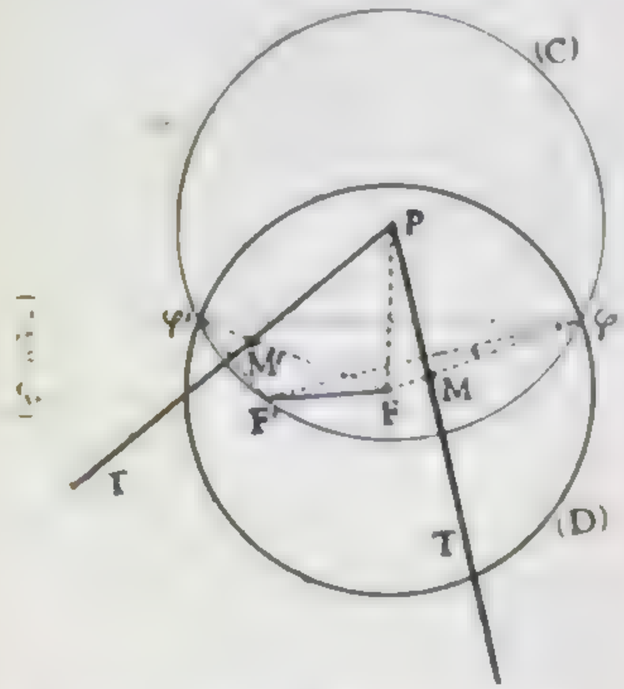
(ش ۶۴۶)

۸۳۵ - تبصره - دو مثلث PMF' و PFP' متساوی‌الساقین هستند (ش ۶۴۶) بنابراین خطوط MF' و FP' باهم موازی میباشند. بهمین دلیل

خطوط $M'F'$ و FP نیز متوازیند. پس چهارضلعی $MF'M'F$ متوازی‌الاضلاع است. بنابراین نقاط M و M' نسبت بنقطهٔ O قرینهٔ یکدیگرند.

۸۳۶ - مسئلهٔ ۳ - میخواهیم از نقطهٔ معلوم P واقع درصفحهٔ یك بیضی مماسی بر آن بیضی رسم کنیم.

فرض میکنیم F و F' دو کانون بیضی و (D) دایرهٔ هادی نظیر کانون F باشد (ش ۶۴۷) قرینهٔ کانون F' نسبت بخط مماس مطلوب از طرفی روی دایرهٔ هادی (D) نظیر کانون F (شمارهٔ ۸۲۹) وازطرف دیگر روی دایرهٔ (C) که مرکزش P وشعاعش PF' باشد واقع است. دیرادو نقطه که نسبت بخط مماس مطلوب قرینهٔ یکدیگر باشند از هرنقطهٔ واقع براین خط و رسیده از نقطهٔ P بیك فاصله واقعند.



اگردایرهٔ (C) دایرهٔهادی (D) رادرنقاط φ و φ' قطع کند میتوان از نقطهٔ P دومماس بربیضی رسم کرد و در این‌صورت میگویند **نقطهٔ P درخارج بیضی واقع است.** این دومماس عبارتند از عمود منصفهای قطعه خطهای $F'\varphi$ و $F'\varphi'$ و نقاط تماس آنها M و M' بترتیب روی شعاعهای $F\varphi$ و $F\varphi'$ از دایرهٔ هادی واقعند

اگر دایرهٔ (C) بادایرهٔ هادی (D) مماس باشد نقطهٔ P روی بیضی

واقعست (شمارهٔ ۸۲۴) و مسئله یك‌جواب دارد که همان مماسی است که میتوان درنقطهٔ P واقع بربیضی برآن رسم کرد.

اگر دو دایرهٔ (C) و (D) نقطهٔ مشترکی نداشته باشند میتوان از نقطهٔ P مماسی بربیضی رسم کرد و در اینصورت میگویند **نقطهٔ P در داخل بیضی واقع است.**

۸۳۷ - شرط آنکه نقطه‌ای مانند P در خارج یك بیضی واقع باشد - برای آنکه نقطهٔ P درخارج بیضی واقع باشد یعنی بتوانیم از P دو مماس بربیضی رسم کنیم لازم و کافیست که دوایر (C) و (D) متقاطع باشند و برای آنکه دوایر (C) و (D) متقاطع باشند لازم و کافیست که بتوانیم مثلثی بسازیم که اضلاع آن مساوی با قطعه خطهای PF (خط‌المرکز دودایره) و PF' و $2a$ (شعاعهای دودایره) باشند و برای این لازم و کافیست که طول یکی ازاین سه‌قطعه‌خط ازمجموع دوقطعه‌خط دیگر کوچکتر و ازتفاضل آنها بزرگتر باشد یعنی شرط تقاطع دودایره مزبور ازمجموع حدین توصیف

$$PF-PF'<2a<PF+PF'$$

یعنی مساوی $|PF-PF'|<2a$ همواره برقرار است زیرا اگر نقطهٔ P روی محور کانونی واقع نباشد و یا متعلق بقطعه‌خط FF' باشد داریم $|PF-PF'|<2c$ و اگر P روی محور کانونی و خارج از قطعه‌خط FF' باشد داریم $|PF-PF'|=2c$ پس درهرصورت نامساوی $|PF-PF'|<2a$ برقرار است (زیرا $2c<2a$)

بنابراین شرط لازم و کافی برای آنکه بتوان از نقطهٔ P دو مماس بربیضی رسم کنیم اینست که داشته باشیم

$$\boxed{PF-PF'>2a}$$

۸۳۸ - قضایای پونسله - اگر از نقطهٔ P واقع در خارج یك بیضی دوخط مماس بر آن بیضی رسم کنیم و نقاط تماس آنها را M و M' و کانونهای بیضی را F و F' بنامیم

اولا - خط راستی که از نقطهٔ P واز یك کانون بیضی مثلا از F میگذرد زاویهٔ MFM' را نصف میکند.

☆ Poncelet [illegible]

ثانیاً خطوط مماس: نسبت بخط نیمساز زاویهٔ FPF' قرینهٔ یکدیگرند.

اولاً شکلی را که در شمارهٔ ۸۳۶ [illegible] رسم مماسهای PM و PM' بکار بردیم در نظر میگیریم (ش ۶۴۸) [illegible] مشترکهای دو دایرهٔ (C) و (D) [illegible] بخط PF که [illegible] دو دایره مرسوم [illegible]

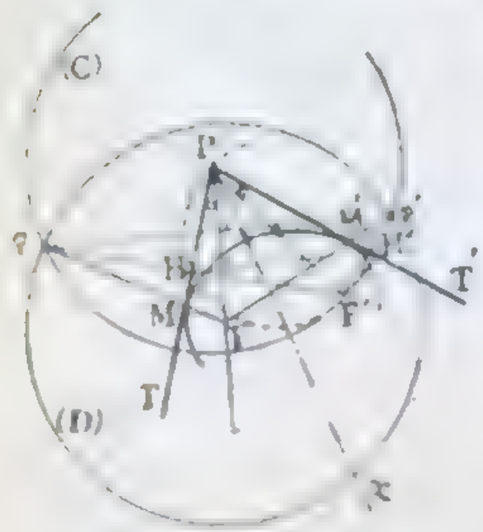
$$FPP' = PFP'$$

[illegible] M روی [illegible] M' روی [illegible]

$$MPP' = PPM$$

[illegible] PP' [illegible] MPM' [illegible] (D) [illegible] را اختیار کرد.

ثانیاً [illegible] H و [illegible] (ش ۶۴۸) [illegible]



(ش ۶۴۸)

[illegible] در مثلث PHH' ارتفاع نظیر ضلع HH' روی خط [illegible] PT [illegible] PT' [illegible]

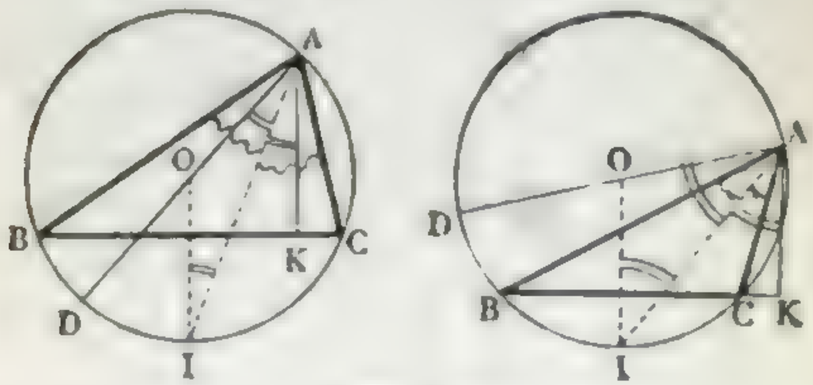
[illegible] PM' [illegible] PM [illegible]

و میدانیم (به مسئلهٔ همین شماره رجوع کنید) که نیمساز زاویهٔ HPH' بر نیمساز زاویهٔ FPF' منطبق است. پس خطوط مماس PT و PT' نسبت به نیمساز زاویهٔ FPF' که آنرا Px مینامیم قرینهٔ یکدیگرند.

تبصره - در ذیل شمارهٔ ۲۹۹ در مقالهٔ سوم ثابت کردیم که

اگر در مثلث ABC ارتفاع نظیر ضلع BC را AK و قطری از دایرهٔ محیطی را که از رأس A میگذرد AD بنامیم نیمساز زاویهٔ BAC بر نیمساز زاویهٔ DAK منطبق است.

و در اینجا استدلال این قضیه را یادآوری میکنیم



(ش ۶۴۹)

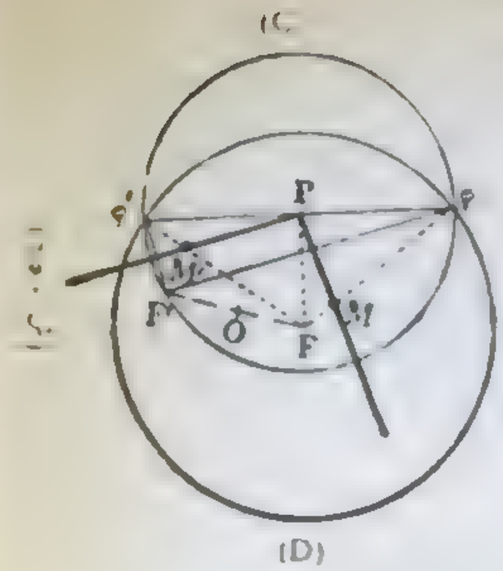
نیمساز زاویهٔ BAC را رسم میکنیم تا دایرهٔ محیطی را در نقطهٔ دیگر I قطع کند (ش ۶۴۹) باید ثابت کنیم که AI نیمساز زاویهٔ DAK نیز هست. نقطهٔ I را بنقطهٔ O مرکز دایرهٔ محیطی وصل میکنیم، OI بر BC عمود است و داریم

$\hat{DAI} = \hat{OIA}$ (زیرا مثلث OIA متساوی‌الساقین است)

از طرف دیگر $\hat{KAI} = \hat{OIA}$ (زوایای متبادل داخلی)

پس $\hat{DAI} = \hat{KAI}$ یعنی AI نیمساز زاویهٔ DAK است

۸۳۹ - مکان هندسی نقاطی که میتوان از آنها دو مماس عمود برهم بر یک بیضی رسم کرد - شکلی را که در شمارهٔ ۸۳۶ برای ترسیم مماسهای PM و PM' بکار بردیم در نظر میگیریم (ش ۶۵۰) از روی این شکل واضح است که برای آنکه مماسهای PM و PM' برهم عمود باشند لازم و کافیست که خطوط $F'y'$ و Fy که بترتیب بر مماسهای مزبور عمودند بر یکدیگر نیز عمود باشند و برای این لازم و کافیست که خط راست [illegible]



از مرکز دایرهٔ (C) یعنی از نقطهٔ P بگذرد. چون خط Δ_{PP} محور اصلی دو دایرهٔ (C) و (D) است برای آنکه خط Δ_{PP} از نقطهٔ P بگذرد لازم و کافیست که نقطهٔ P نسبت بدو دایرهٔ (C) و (D) دارای یک قوت مشترک باشد یعنی Δ_{P} لازم و کافیست که داشته باشیم

$$-PF'^2 = PF^2 - 4a^2$$

[مقدار سمت راست تساوی فوق قوت نقطهٔ P نسبت بدایرهٔ (D) و مقدار سمت چپ آن قوت نقطهٔ P نسبت بدایرهٔ (C) است]

از تساوی فوق نتیجه میشود

$$PF^2 + PF'^2 = 4a^2 \qquad (1)$$

و اگر مرکز بیضی یعنی وسط قطعه‌خط FF' را O بنامیم (ش ۶۵۰) در مثلث PFF' که PO یکی از میانه‌های آنست بنظر شمارهٔ ۳۱۰ (مقالهٔ سوم) میتوان نوشت:

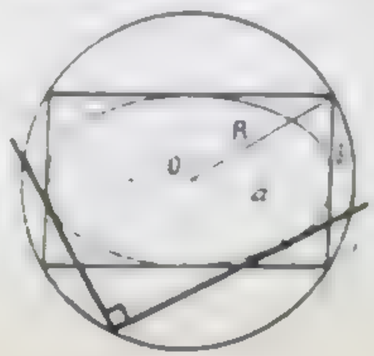
$$PF^2 + PF'^2 = 2OP^2 + 2c^2 \qquad (\text{زیرا } FF' = 2c)$$

و با در نظر گرفتن رابطهٔ (۱) نتیجه میشود

$$4a^2 = 2OP^2 + 2c^2$$

و از اینجا

$$OP^2 = 2a^2 - c^2 = a^2 + b^2$$



یعنی مکان هندسی نقطهٔ P دایره‌ایست که مرکزش نقطهٔ O مرکز بیضی و شعاعش $R = \sqrt{a^2+b^2}$ میباشد این دایره را دایرهٔ مونژ* مینامند

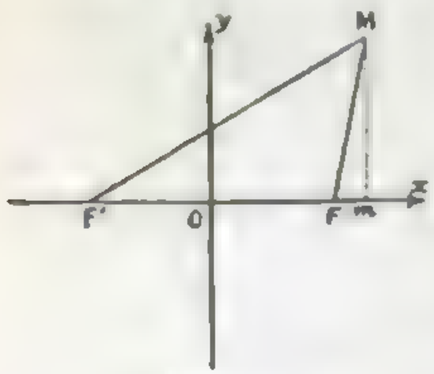
اگر در چهار رأس بیضی چهار مماس بر آن رسم کنیم از تقاطع این چهار خط مماس یک مستطیل پدید میآید و واضح است که دایرهٔ مونژ از چهار رأس این مستطیل میگذرد (ش ۶۵۱)

معادلهٔ بیضی

۸۴۰ ـ محاسبهٔ شعاع حاملهای یک نقطهٔ متعلق به بیضی برحسب طول آن نقطه ـ کانونهای بیضی (E) را F و F' و طول محور اطول آنرا 2a و طول قطعه‌خط FF' را 2c مینامیم و خط نامحدود FF' را محور طولها (x'x) و جهت مثبت آنرا از F' بطرف F میگیریم و عمود منصف قطعه‌خط FF' را محور عرضها (y'y) اختیار میکنیم (ش ۶۵۲).

حال نقطهٔ دلخواهی مانند M بمختصات x و y در صفحهٔ xoy در نظر میگیریم و طولهای MF و MF' را برحسب x و y و c حساب میکنیم

اگر تصویر نقطهٔ M را بر محور x'x نقطهٔ m بنامیم داریم $\overline{Om} = x$ و $\overline{mM} = y$ و $\overline{OF} = c$ و در مثلث قائم‌الزاویهٔ MFm میتوان نوشت



(ش ۶۵۲)

$$MF^2 = \overline{Fm}^2 + \overline{mM}^2$$

اما روی محور x'x نظر برابطه زیر داریم

$$Fm = \overline{Om} - OF = x - c$$

پس

$$(1) \quad MF^2 = (x-c)^2 + y^2$$

اگر نقطهٔ F را به F' تبدیل کنیم c به c- تبدیل میشود زیرا $OF' = -c$ پس داریم

$$(2) \quad MF'^2 = (x+c)^2 + y^2$$

چون رابطهٔ (۱) را عضو بعضو از رابطهٔ (۲) کم کنیم حاصل میشود

$$(3) \quad \overline{MF'}^2 - \overline{MF}^2 = 4cx$$

ما اینجا فرض کرده‌ایم که نقطهٔ M نقطهٔ دلخواهی از صفحهٔ xoy باشد

* Monge

اگر نقطه M روی بیضی (E) واقع باشد تفاضله از روابط فوق رابطه زیر را میدهد

$$MF' - MF = 2a \qquad (4)$$

رابطهٔ (۳) را میتوان چنین نوشت

$$(MF' - MF)(MF' + MF) = 4cx$$

ونظر برابطهٔ (۴) رابطهٔ فوق باینصورت درمیآید :

$$MF' - MF = \frac{4cx}{2a} = \frac{2cx}{a} \qquad (5)$$

و از روابط (۴) و (۵) باسانی نتیجه میشود

$$MF = a - \frac{cx}{a} \quad \text{و} \quad MF' = a + \frac{cx}{a} \qquad (6)$$

بنابراین اگر نقطهٔ M روی بیضی (E) واقع باشد طولهای شعاع حاملهای آن از روی روابط (۶) برحسب x (طول نقطهٔ M) ومقادیر معلوم a و c بدست میآید .

۴۸۱ - معادلهٔ بیضی - بدواً خاطرنشان میکنیم که معادلهٔ یک منحنی مانند (C) نسبت بمحورهای مختصات x'x و y'y رابطه‌است مابین x و y بطوریکه‌اولا اگر نقطه‌ای‌روی منحنی C واقع باشد مختصاتش در این رابطه صدق کند وثانیاً بعکس هر نقطه که مختصاتش‌دررابطه مزبور صادق باشد روی منحنی (C) واقع باشد

اگر نقطهٔ m بمختصات x و y روی بیضی (E) واقع باشد شعاع حاملهای آن در روابط (۱) تا (۶) شمارهٔ ۸۴۰ صادق هستند وچون‌مقدار MF را از روابط (۶) در رابطهٔ (۱) قرار دهیم حاصل میشود

$$\left(a - \frac{cx}{a}\right)^2 = (x-c)^2 + y^2$$

و پس از انجام دادن عملیات لازم*

$$\left(\frac{a^2 - c^2}{a^2}\right)x^2 + y^2 = a^2 - c^2$$

* اگر مقدار MF از روابط (۶) در رابطهٔ (۲) قرار دهیم همین نتیجه بدست خواهد آمد

میدانیم که $a^2 - c^2 = b^2$ پس‌رابطهٔ فوق باینصورت درمیآید :

$$\frac{b^2x^2}{a^2} + y^2 = b^2$$

وچون طرفین را بر b^2 تقسیم کنیم حاصل میشود

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (7)$$

بنابراین هر نقطه که روی‌بیضی (E) واقع باشد مختصاتش در رابطهٔ (۷) صادق هستند

اکنون ثابت میکنیم که برعکس اگر مختصات نقطه‌ای در رابطهٔ (۷) صدق کند آن نقطه روی بیضی (E) واقع است

فرض میکنیم مختصات x_1 و y_1 متعلق بنقطهٔ M_1 در رابطهٔ (۷) صادق باشند بنابراین داریم

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$$

و یا

$$y_1^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x_1^2) \qquad (8)$$

از روی این‌رابطه پیداست که x_1^2 نمیتواند بزرگتر از a^2 ویامساوی با آن میباشد بنابراین داریم

$$-a \leq x_1 \leq +a$$

حقیقت است (۱) که نقطهٔ M_1 سوارات‌محور y'y رسم شود معادله‌اش $x = x_1$ است وچون x_1 بین $-a$ و $+a$ محصوراست. این‌خط‌بیضی (E) را در دو نقطه قطع میکند* و برای بدست آوردن عرضهای ایندو نقطه کافیست درمعادلهٔ (۷) بجای x مقدار x_1 را قرار دهیم باین‌طریق حاصل میشود

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) \qquad (9)$$

* اگر x_1 مساوی $+a$ یا مساوی $-a$ باشد y_1 مساوی با صفر است ونقطهٔ M_1 بر دو رأس A_1 و A_2 (رأس (۱)) منطبق است

از مقایسهٔ روابط (۸) و (۹) معلوم میشود $y^2 = y_1^2$

و از آنجا $y = \pm y_1$

پس نقطهٔ M_1 بر یکی از نقاط تقاطع مشترک خط D و بیضی (E) منطبق است یعنی M_1 روی بیضی (E) واقع میباشد

از آنچه گذشت نتیجه میشود که

معادلهٔ بیضی که طول محور اطولش 2a و طول محور اقصرش 2b باشد عبارتست از :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

۸۴۲ - معادلهٔ دایره - در مثلث قائم‌الزاویهٔ OMm (ش ۶۵۳)

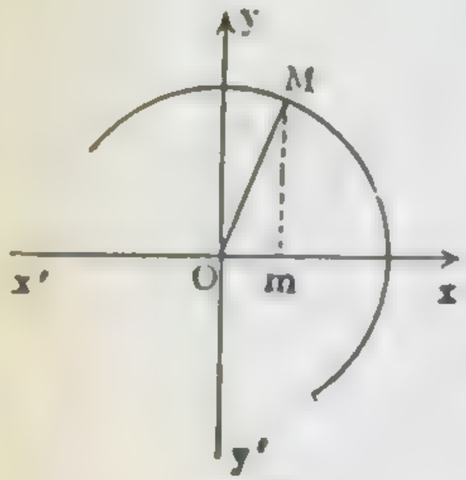
$$\overline{OM}^2 = \overline{Om}^2 + \overline{mM}^2 = x^2 + y^2$$

بنابراین اگر فاصلهٔ OM مساوی با R باشد مختصات هریك از نقاط دایرهٔ (R و O) درمعادلهٔ

(۱) $x^2 + y^2 = R^2$

صادق هستند

برعکس اگر مختصات نقطهٔ M در معادلهٔ (۱) صادق باشند داریم $OM^2 = R^2$ یعنی نقطهٔ M روی دایرهٔ (R و O) واقع است . پس معادلهٔ (۱) معادلهٔ دایرهٔ (R و O) میباشد



(ش ۶۵۳)

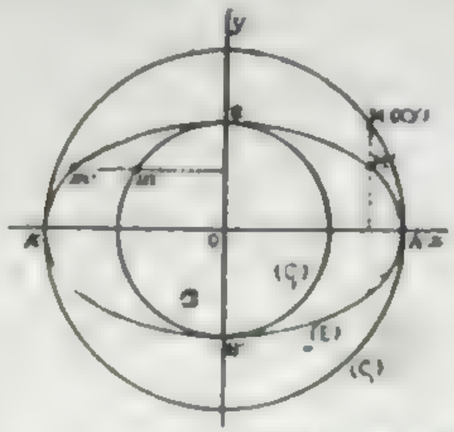
میتوان معادلهٔ (۱) را بصورت $\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1$ نوشت

ازینرو میتوان دایره را حالت خاصی از بیضی دانست . دراین حالت خاص طولهای دومحور باهم مساوی و دو کانون برهم منطبق هستند.

۸۴۳ - تعبیری از معادلهٔ بیضی - دایرهٔ (C_1) بمعادلهٔ $x^2 + y^2 = R^2$ را درنظرمیگیریم ونظیر هرنقطه مانند M بمختصات x و y ازاین دایره نقطهٔ M' راکه مختصاتش عبارتنداز

$x = X$ و $y = kY$ (k عددی‌است مثبت)

اختیار میکنیم (ش ۶۵۴) بعبارت‌دیگر طولهای نقاط مختلف دایره‌را تغییر نمیدهیم ولی عرضهای نقاط‌مختلف آنرا درعدد مثبت k ضرب میکنیم



(ش ۶۵۴)

مختصات نقطه M' در رابطهٔ

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{k^2R^2} = 1 \quad \text{و یا} \quad x^2 + \frac{y^2}{k^2} = R^2$$

صادق‌هستند. بنابراین نقطهٔ M' روی یك بیضی‌واقع‌است که‌طول محورهای آن 2R و 2kR میباشد. اگر k کوچکتراز ۱ باشد2R طول محور اطول بیضی‌است و دایرهٔ (C_1) دایرهٔ اصلی این بیضی میباشد واگر k بزرگتراز ۱ باشد 2R طول محور اقصر بیضی است

بهمین‌طریق میتوان ثابت کرد که اگر عرضهای نقاط مختلف یك دایره مانند (C_1) را تغییر ندهیم ولی طولهای نقاط مختلف آنرا در عدد مثبت k ضرب کنیم (ش ۶۵۴) نقاط حاصل روی بیضی بمعادلهٔ

$\frac{x^2}{k^2R^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1$ واقع میباشد

نتیجه - **بیضی را که محوراطولش $AA' = 2a$ و محور اقصرش $BB' = 2b$ میباشد درنظر میگیریم. برای بدست‌آوردن نقاط این بیضی کافیست که :**

الف ـ یا عرضهای جمیع نقاط دایرهٔ بقطر AA' (دایرهٔ اصلی) را درعدد $\frac{b}{a}$ ضرب کنیم (ولی طولهای آنهارا تغییر ندهیم)

ب ـ یا طولهای جمیع نقاط دایرهٔ بقطر BB' را در عدد $\frac{a}{b}$ ضرب کنیم (ولی عرضهای آنها را تغییر ندهیم)

برعکس واضح است که اگر عرض یکی از نقاط بیضی را در $\frac{a}{b}$ ضرب کنیم ولی طول آنرا تغییر ندهیم نقطهٔ حاصل روی دایرهٔ بقطر AA' واقع خواهد بود وهمچنین اگر طول یکی از نقاط بیضی را در $\frac{b}{a}$ ضرب کنیم ولی عرض آنرا تغییر ندهیم نقطهٔ حاصل روی دایرهٔ بقطر BB' واقع خواهد بود

۸۴۴ ـ مورد استعمال ـ طریقهٔ دیگر برای ترسیم بیضی بوسیلهٔ نقطه‌یابی.

بیضی (E) را در نظر میگیریم و محور اطول آنرا AA' و محور اصغر آنرا BB' مینامیم و یك نقطه مانند M روی این بیضی اختیار میکنیم و از M دوخط بترتیب برخطوط AA' و BB' عمودمیکنیم تا اولی دایرهٔ بقطر AA' را درنقطهٔ M' ودومی دایرهٔ بقطر BB' را درنقطهٔ M'' قطع کند بطوریکه M و M' دریك‌طرف خط‌راست AA' و همچنین نقاط M و M'' در یك‌طرف خط‌راست BB' واقع باشند (ش ۶۵۵) اگر مختصات M را $(x \text{ و } y)$ ومختصات M' را $(x' \text{ و } y')$ ومختصات M'' را $(x'' \text{ و } y'')$ نامیم نظر بآنچه گفتیم داریم

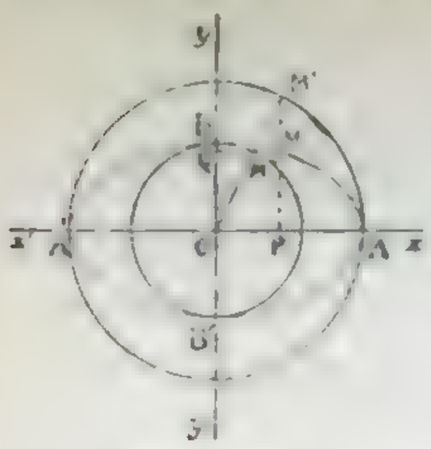
$$M\left|\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right. \qquad M'\left|\begin{matrix} x' = x \\ y' = y\,\frac{a}{b} \end{matrix}\right. \qquad M''\left|\begin{matrix} x'' = x\,\frac{b}{a} \\ y'' = y \end{matrix}\right.$$

و از روابط فوق میتوان نتیجه گرفت

$$\frac{y'}{x'} = \frac{y''}{x''}$$

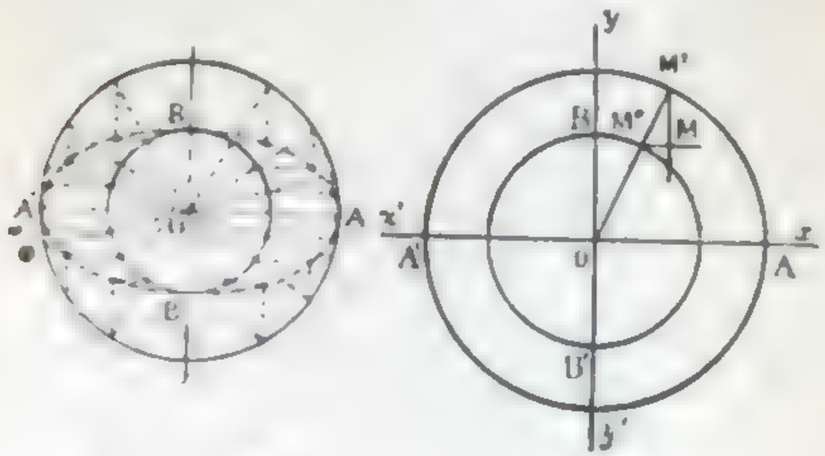
یعنی $\frac{y}{x}$ ضریب زاویه خط OM' است و $\frac{y''}{x''}$ ضریب زاویه خط

OM'' میباشد پس نقاط M' و M'' با نقطهٔ O روی یك خط راست واقع هستند و گفتیم از این چون مختصات متناظر نقاط M' و M'' متحدالعلامه هستند این دو نقطه روی خط راست $OM'M''$ در یك طرف نقطهٔ O واقعند.



ش ۶۵۵

بنابراین اگر AA' و BB' برحسب طول و وضع معلوم باشند برای بدست آوردن نقطه‌ای مانند M از بیضی کافیست دودایره بقطرهای AA' و BB' رسم کنیم و از نقطهٔ O بیم‌خطی بگذرانیم که دایرهٔ اول را در نقطهٔ M' و دایرهٔ دوم را در نقطهٔ M'' قطع کند واز M' و M'' بترتیب دوخط عمودبر AA' و BB' فرود آوریم. فصل‌مشترك این‌دو عمود نقطه‌ایست‌از بیضی (ش۶۵۶ ـ الف) باین‌ترتیب میتوان نقاط مختلف بیضی را تعیین کرد (ش۶۵۶ ـ ب)



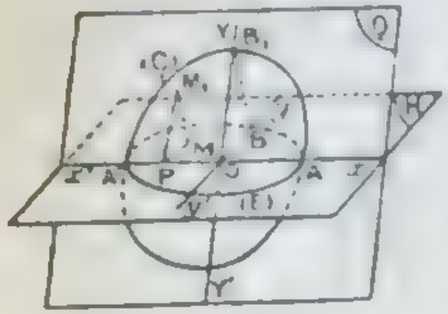
ش ۶۵۶ ـ الف

ش ۶۵۶ ـ ب

تصویر قائم دایره وبیضی

۸۴۵ ـ قضیه ـ تصویر قائم هردایره روی صفحه‌ای که نه برصفحهٔ آن دایره عمود و نه باآن موازی باشد یك بیضی‌است.

چون تصاویر بنشکل روی دو صفحهٔ موازی باهم مساویند (شمارهٔ ۶۲۰ مقالهٔ پنجم) برای اثبات قضیه متواسم فرض کنیم که صفحهٔ تصویر H از مرکز دایره میگذرد. بنابراین دایرهٔ (C_1) را که مرکزش در صفحهٔ تصویر H واقع است درنظر میگیریم و صفحهٔ دایرهٔ (C_1) را صفحهٔ Q و مرکز این دایره را نقطهٔ O مینامیم (ش ۶۵۷-الف). صفحهٔ H دایرهٔ (C_1) را در دو نقطهٔ A و A' که دو انتهای یکی از قطرهای دایرهٔ (C_1) هستند قطع میکند.



(ش ۶۵۷ - الف)

[illegible] (C_1) را که قطر AA' عمود است [illegible] نقطهٔ B_1 و تصویر B_1 [illegible] صفحهٔ H نقطهٔ B مینامیم و شعاع دایرهٔ (C_1) را a و اندازهٔ OB را b میخوانیم اگر زاویهٔ حادهٔ دو صفحهٔ H و Q را α بنامیم واضح است که

$$b = a\cos\alpha$$

درصفحهٔ H خط راست A'A را محور x'x و جهت مثبت آنرا از O بطرف A میگیریم و خط راست OB را محور y'y و جهت مثبت آنرا از O بطرف B اختیار میکنیم و در صفحهٔ Q همان محور x'x را محور طولها (X'X) و خط راست OB_1 را محور Y'Y و جهت مثبت آنرا از O بطرف B_1 میگیریم. معادلهٔ دایرهٔ (C_1) در صفحهٔ Q عبارتست از

$$X^2+Y^2=a^2$$

اگر M_1 نقطهٔ دلخواهی از صفحهٔ Q و نقطهٔ M تصویر آن برصفحهٔ H باشد وعمود M_1P رابرمحور x'x فرود آوریم (ش ۶۵۷ - الف) نظر بقضیهٔ سه عمود MP نیز برمحور x'x عمود است و از تشابه دومثلث BOB_1 و MPM_1 حاصل میشود

$$(1) \qquad \frac{PM}{PM_1} = \frac{b}{a} = \cos\alpha$$

مختصات M_1 درصفحهٔ Q عبارتند از $X = OP$ و $Y = PM_1$

مختصات M درصفحهٔ H عبارتند از $x = OP$ و $y = PM$

وچون ملاحظه شد که PM_1 و PM متعدالمقدار هستند [illegible] مساوی (۱) حاصل میشود

$$(2) \qquad Y = \frac{a}{b}y \quad \text{و یا} \quad \frac{y}{Y} = \frac{b}{a}$$

برای آنکه نقطهٔ M(x و y) متعلق بتصویر دایرهٔ (C_1) باشد (ش ۶۵۷ - ب) لازم و کافیست که نقطهٔ M_1 روی دایرهٔ (C_1) باشد یعنی لازم و کافیست که داشته باشیم

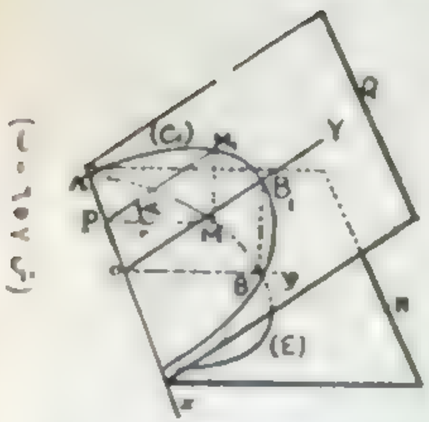
$$X^2+Y^2=a^2$$

و با نظر برابطهٔ (۲)

$$x^2+\frac{a^2}{b^2}y^2=a^2$$

واز آنجا

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$



(ش ۶۵۷ - ب)

یعنی نقطهٔ M روی بیضی (E) که محور اطولش AA' است و نقطهٔ B یکی از دو انتهای محور اقصرش میباشد واقع است. بعبارت دیگر بیضی (E) تصویر دایرهٔ (C_1) میباشد

تبصره - وقتی یک دایره را بر یک صفحه تصویر میکنیم محور اطول بیضی تصویر عبارتست از تصویر قطری از دایره که باصفحهٔ تصویر موازیست و محور اقصر بیضی تصویر عبارتست از تصویر قطری از دایره که روی یکی از خطوط بزرگترین شیب صفحهٔ دایره نسبت بصفحهٔ تصویر واقع است.

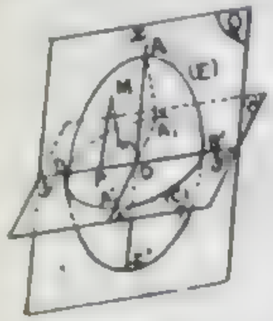
۸۴۶ - قضیه - هر بیضی را میتوان تصویر یک دایره دانست.

بیضی (E) را درصفحهٔ H درنظر میگیریم (ش ۶۵۷-ب) واز نقطهٔ B انتهای محور اقصر بیضی عمودی برصفحهٔ H اخراج میکنیم و روی این عمود قطعه خط BB_1 را مساوی با $c=\sqrt{a^2-b^2}$ (نصف فاصلهٔ کانونی بیضی) جدا میکنیم. اگر درصفحهٔ Q که از نقاط A و A' و B_1 میگذرد

در [illegible] صفحه A'_1 [illegible] B_1 میگیرند [illegible]
$OB'^2 = OB'^2 + OB'^2$ یعنی $Oa'^2 = a'^2 + b'^2$ و تصویر [illegible] صفحه
H عبارتست از بیضی (E)

۸۴۷ ـ قضیه ـ هردایره را میتوان تصویر یك بیضی دانست.

دایرهٔ (C_1) را درصفحهٔ تصویر H در نظر میگیریم و فرض میکنیم B'B یکی از قطرهای این دایره باشد وقطر A'_1A_1 را عمود برقطر B'B رسم میکنیم (ش ۶۵۸) حال از نقطهٔ A_1 عمودی برصفحهٔ H اخراج میکنیم و روی این عمود نقطهٔ دلخواهی مانند A در نظر میگیریم وصفحه‌ای را که ازنقطهٔ A وخط B'B میگذرد صفحهٔ Q مینامیم. در صفحهٔ Q یك بیضی میتوان رسم کرد که محور اقصرش B'B ویکی از دوسر محور اطولش نقطهٔ A باشد این بیضی را (E) مینامیم



(ش ۶۵۸)

اگر درصفحهٔ H خط راست B'B رامحور y'y وجهت مثبت آنرا ازO بطرف B' بگیریم وخط راست A'_1A_1 را محور X'X اختیار کنیم وشعاع دایرهٔ (C_1) را b نامیم معادلهٔ دایرهٔ (C_1) عبارت خواهد بود از

$$X'^2 + y'^2 = b'^2$$

درصفحهٔ Q همان محور y'y را محور عرضها اختیار میکنیم وخط راست OA را محور x'x و جهت مثبت آنرا از O بطرف A میگیریم و طول OA را a مینامیم. همانطور که در شمارهٔ ۸۴۵ گفتیم اگر نقطهٔ M بمختصات (x و y) یکی از نقاط صفحهٔ Q باشد وتصویر M را روی صفحهٔ H نقطهٔ m بنامیم مختصات نقطهٔ m درصفحهٔ H عبارتند از

$$Y = OP = y \quad \text{و} \quad X = Pm = PM \times \frac{b}{a} = x\frac{b}{a}$$

برای آنکه نقطهٔ m روی دایرهٔ (C_1) واقع باشد لازم و کافیست که داشته باشیم

$$\frac{b'^2x^2}{a'^2} + y'^2 = b'^2$$

و یا

$$\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} = 1$$

واین معادله معادلهٔ بیضی (E) درصفحهٔ Q میباشد پس دایرهٔ (C_1) را میتوان تصویر بیضی (E) دانست.

موارد استعمال

الف ـ مساحت بیضی

۸۴۸ ـ درشمارهٔ ۶۴۳ (مقالهٔ پنجم) گفتیم که اگر مساحت قسمتی از یك صفحه را که یك منحنی محدود شده باشد S و مساحت تصویر آنرا برصفحهٔ دیگری S' و زاویهٔ حادهٔ آن دوصفحه را α بنامیم داریم

$$S' = S\cos\alpha$$

چون بیضی (E) منطبق بصفحهٔ H را میتوان تصویر دایرهٔ (C_1) منطبق صفحهٔ Q دانست (ش ۶۵۷ ـ س) و کسینوس زاویهٔ حادهٔ دوصفحهٔ H و Q مساویست با $\frac{b}{a}$ پس

$$\text{مساحت دایرهٔ } (C_1) = \pi b^2 \quad \text{و} \quad \frac{b}{a} = \pi ab \quad \text{مساحت بیضی } (E)$$

یعنی: اگر نصف طول محور اطول بیضی a و نصف طول محور اقصر آن b باشد مساحت بیضی مساویست با πab

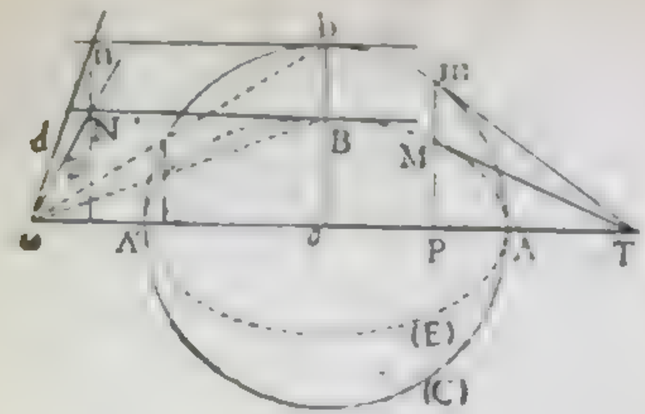
ب ـ حل مسائل ترسیم هندسی درمورد بیضی

۸۴۹ ـ اگردرشکل ۶۵۷ صفحهٔ Q را حول خط راست AA' دوران دهیم تا برصفحهٔ H منطبق شود پس ازاین دوران دایرهٔ (C_1) بردایرهٔ اصلی بیضی E که آنرا (C) مینامیم منطبق میشود* واگر وضع جدید یك نقطه مانند M_1 از صفحهٔ Q را در صفحهٔ H نقطهٔ m بنامیم و تصویر نقطهٔ M_1 برصفحهٔ H نقطهٔ M باشد (ش ۶۵۹) واضح است که نقاط M و m روی خط راستی که برلولای AA' عمود است واقع میباشند واگر پای این عمود

---

* فرض میکنیم این دوران طوری انجام گیرد که نقطهٔ B با وضع جدید B_1 که آنرا نقطهٔ b مینامیم در بالاطرف خط راست AA' واقع شود.

را P بنامیم داریم $\frac{PM}{Pm}=\frac{b}{a}$ (اگر زاویهٔ حادهٔ دوصفحهٔ Q و H را α



(ش ۶۵۹)

بنامیم این نسبت مساویست با cosα)

باین‌طریق بازای هر نقطه‌مانند M_1 ازصفحهٔ Q میتوان‌دو نقطه مانند M و m ازصفحهٔ H بدست‌آورد. دراین‌مقام نقاط M و m را نظیریکدیگر میگوییم‌و برای سهولت بیان نقطهٔ m را **تسطیح نقطهٔ M** مینامیم و نقطهٔ M را **ترفیع نقطهٔ m** میخوانیم

هر گاه نقطه‌ای درصفحهٔ شکل درنظر بگیریم میتوان نظیر آنرا با درنظر گرفتن قاعدهٔ زیر بدست آورد

اگر نقاط M و m نظیر یکدیگر و m تسطیح و M ترفیع باشد این‌دو نقطه دریک‌طرف خط‌راست AA' واقعندو خط‌راست Mm برلولای AA' درنقطه‌ای مانندP عموداست و داریم:

$$\frac{PM}{Pm}=\frac{b}{a}$$

بادرنظر گرفتن مطالب فوق و آنچه در شمارهٔ ۸۴۵ گفتیم واضح‌است که :

هرنقطه که مانند M روی‌بیضی (E) درنظر بگیریم و آنرا ترفیع بنامیم تسطیح نظیر آن یعنی m روی دایرهٔ اصلی بیضی واقع است . وهمچنین هرنقطه که مانند m روی دایرهٔ اصلی بیضی (E) درنظر بگیریم و آنرا تسطیح بنامیم ترفیع نظیر

آن یعنی M روی بیضی واقع است.

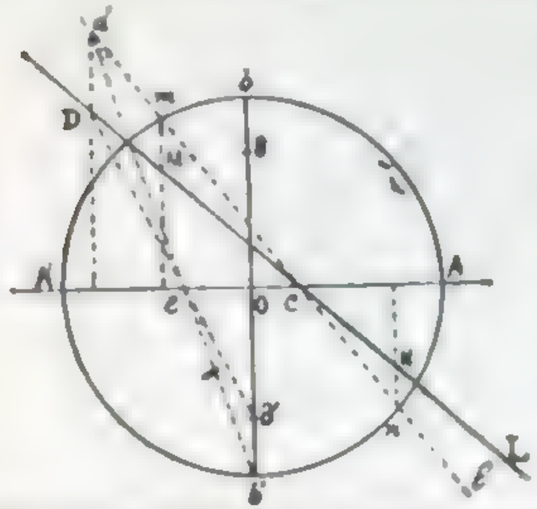
هر خط مستقیم مانند D که آنرا ترفیع بنامیم یك خط راست مانند d (تسطیح خط D) بدست میآید. زیرا خط D را میتوان در صفحهٔ H تصویر خطی مانند D_1 متعلق بصفحهٔ Q دانست و پس‌از دوران مذکور خط D_1 برخط راستی مانند d ازصفحهٔ H منطبق‌میشود ـ اگر d معلوم باشد میتوان D را مشخص کرد

واضح است که خطوط D و d با یکدیگر را روی خط راست AA' قطع‌میکنند ویا هردو باخط AA' موازی هستند. و اگر خطی مانند MT در نقطهٔ M بر بیضی (E) مماس باشد خط نظیر آن یعنی mT در نقطهٔ m بادایرهٔ اصلی مماس‌است (ش۶۵۹) وبرعکس☼

ملاحظات فوق‌را میتوان برای حل کردن بعض مسائل مربوط به‌بیضی بکار برد.

۸۵۰ ـ مسئلهٔ ۱ ـ تعیین فصل مشترکهای یك خط راست با یك‌بیضی (این مسئله را در شمارهٔ ۸۲۵ بطریق دیگری حل کرده‌ایم)

فرض میکنیم محورهای AA' و BB' بیضی برحسب طول و وضع معلوم باشد و میخواهیم فصل مشترکهای خط معلومی مانند L را با این بیضی تعیین کنیم (ش ۶۶۰) دایرهٔ اصلی بیضی (دایرهٔ بقطر AA') را رسم میکنیم و تسطیح‌های نقاط B و B' را بترتیب b و b' و فصل‌مشترك خط L را باخط AA' نقطه c مینامیم و بدوا تسطیح خط L را معین‌میکنیم. این تسطیح ازنقطهٔ c



(ش ۶۶۰)

☼ زیرا اگر M و M' دونقطهٔ مجاور روی‌بیضی (E) باشد بنابرآنها m و m' دونقطهٔ مجاور روی دایرهٔ اصلی هستند واگر قاطع MM' بسمت‌وضع حدی میل‌کند و بربیضی مماس شود قاطع mm' نیز بسمت وضع‌حدی میل خواهد کرد و بردایرهٔ اصلی مماس خواهد شد

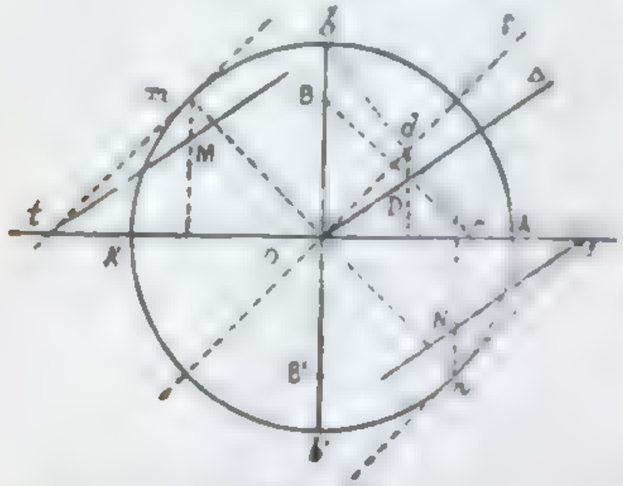
میگذرد و کافیست یك نقطهٔ دیگر از آنرا مشخص کنیم. برای این کار نقطه‌ای مانند D روی خط L اختیار و خط DB' را رسم میکنیم تا لولا یعنی AA' را در نقطه ای مانند c قطع کند. تسطیح خط DB' عبارتست از خط cb' و تسطیح نقطهٔ D از یك طرف روی خط cb' و از طرف دیگر روی عمودی که از D برلولا رسم شود واقع است. این تسطیح را d میناميم. بنابراین تسطیح خط L عبارتست از خط cd که آنرا l میناميم

اگر فصل مشترکهای خط l را با دایرهٔ اصلی نقاط m و n بنامیم رفیع‌های این دو نقطه عبارتند از فصل مشترکهای خط L با بیضی و برای پیدا کردن ترفیع‌های نقاط m و n کافیست از این دو نقطه دو عمود بر AA' رسم کنیم تا خط L را در نقاط مطلوب یعنی M و N قطع کنند

تمرین ـ برحسب اوضاع نسبی خط L با دایرهٔ اصلی در مسئلهٔ فوق بحث کنید و درصورتیکه خط L با خط AA' موازی باشد مسئله را حل کنید

۸۵۱ ـ مسئلهٔ ۲ ـ ترسیم مماس بر یك بیضی بموازات یك خط راست معلوم (این مسئله را در شمارهٔ ۸۳٤ بطریق دیگری حل کرده‌ایم)

فرض میکنیم محورهای AA' و BB' بیضی برحسب طول و وضع معلوم باشد و میخواهیم مماسی بموازات خط معلوم OΔ براین بیضی رسم کنیم. O مرکز بیضی است (ش ٦٦١)



(ش ٦٦١)

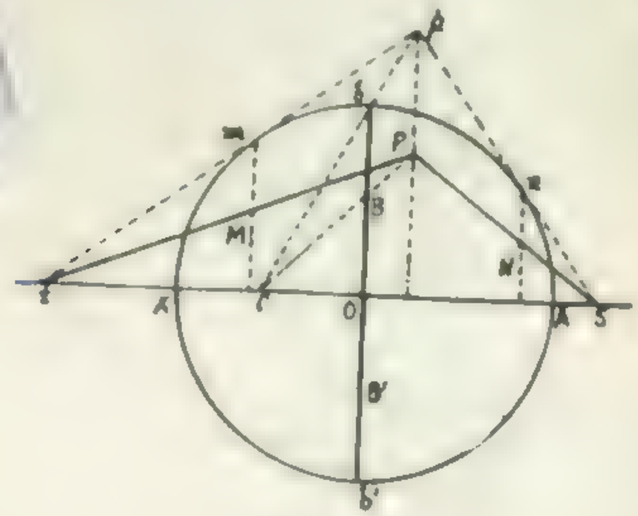
دایرهٔ اصلی بیضی (دایرهٔ بقطر AA') را رسم میکنیم و تسطیح‌های نقاط B و B' را بترتیب b و b' مینامیم و بدواً تسطیح خط OΔ را معین میکنیم

بر تسطیح نقطهٔ O میگذرد و کافیست که یك نقطهٔ دیگر از آنرا بدست آوریم. برای اینکار نقطه‌ای مانند D روی OΔ اختیار و خط DB را رسم میکنیم تا لولا را در نقطه‌ای مانند c قطع کند. تسطیح خط DB عبارتست از خط cb و تسطیح نقطهٔ D از یك طرف روی خط cb و از طرف دیگر روی عمودی که از D برلولا رسم شود واقع است. این تسطیح را d میناميم. بنابراین تسطیح خط L عبارتست از خط cd که آنرا l میناميم

اکنون بر دایرهٔ اصلی مماسهای mt و ns را موازی l رسم میکنیم (m و n نقاط تماس هستند)* ترفیع‌های دو خط mt و ns مماسهای معلوم شد و این دو ترفیع بترتیب از نقاط t و s میگذرند و با Δ موازیند. نقاط تماس M و N بترتیب فصل مشترکهای این دو خط با عمودهای مرسوم از m و n بر AA' میباشد.

۸۵۲ ـ مسئلهٔ ۳ ـ ترسیم مماس بر یك بیضی از یك نقطهٔ معلوم (این مسئله را در شمارهٔ ۸۳٦ بروش دیگری حل کرده‌ایم)

فرض میکنیم محورهای AA' و BB' بیضی برحسب طول و وضع معلوم باشد و میخواهیم از نقطهٔ معلوم P مماسهای براین بیضی رسم کنیم (ش ٦٦٢)



(ش ٦٦٢)

دایرهٔ اصلی بیضی (دایرهٔ بقطر AA') را رسم میکنیم و تسطیح‌های نقاط B و B' را بترتیب b و b' مینامیم و بدواً تسطیح نقطهٔ P را بدست میآوریم. برای اینکار خط PB را رسم میکنیم تا لولا را در نقطه‌ای مانند

* t و s فصل مشترکهای این دو مماس با لولا میباشد

c قطع کند خط cb تسطیح خط PB است. ازاینرو تسطیح نقطهٔ P یعنی p را بدست میآوریم وازنقطهٔ p مماسهای pm و pn را بردایرهٔاصلی رسم میکنیم (m و n نقاط تماس هستند) وصل‌مشترکهای آنهارا باخط AA' بترتیب t و s مینامیم. ترسیم‌های دوخط pm و pn یعنی خطوط Pt و Ps مماسهای مطلوبند.

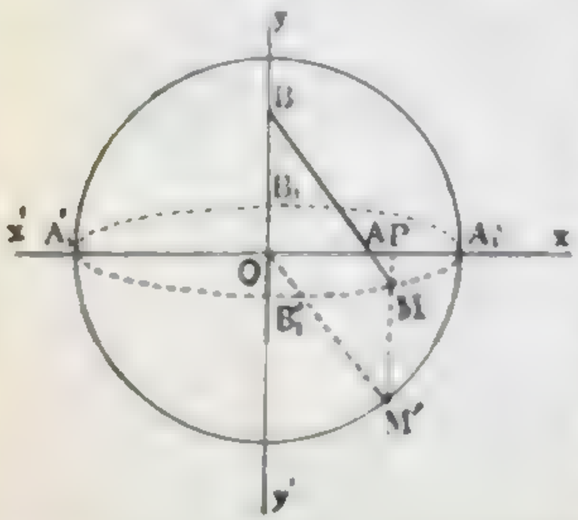
نقاط تماس M و N بترتیب وصل‌مشترکهای این‌دوخط باعمودهای مرسوم از m و n بر AA' میباشند

تمرین ـ برحسب اوضاع نسبی نقطهٔ P و دایرهٔ اصلی درمسئلهٔفوق بحث کنید

طریقهٔ دیگر برای ترسیم بیضی بوسیلهٔ نقطه‌یابی

۸۵۳ ـ قضیه ـ هرگاه قطعه خطی بطول ثابت طوری تغییر مکان دهدکه دوسرآن روی دوخطراست متقاطع وعمود برهم حرکت کند هرنقطه که برمحمل آن قطعه خط* واقع باشد روی یك‌بیضی حرکت خواهدکرد.

فرض میکنیم x'Ox و y'Oy دوخط راست عمود برهم باشند وقطعه خط AB طوری تغییر مکان دهد که نقطهٔ A همواره روی خط x'Ox و نقطهٔ B روی‌خط y'Oy حرکت کند (ش ٦٦٣) و نقطه‌ای مانند M روی خطراست AB درنظر میگیریم (ممکن است M بین A و B و یا خارج از قطعه خط AB واقع باشد) و فواصل ثابت MB و MA را بترتیب a و b مینامیم (MA = b و MB = a)



(ش ٦٦٣)

اگر از نقطهٔ M خطی بموازات y'y و از نقطهٔ O خطی بموازات AB رسم کنیم و وصل مشترك این دوخطرا نقطهٔ M' بنامیم‌شکل OBMM'

* یعنی خط راستی که قطعه‌خط مزبور روی آن واقع‌است.

متوازی‌الاضلاع است و داریم OM' = BM = a بنابراین وقتی قطعه خط AB تغییر مکان میدهد نقطهٔ M' روی دایرهٔ بمرکز O وبشعاع a حرکت میکند و اگرمحل‌مشترك خط MM' را با x'x نقطهٔ P بنامیم ازمثلثهای متشابه PMA و PM'O حاصل میشود :

$$\frac{\overline{PM}}{PM'} = \frac{\overline{MA}}{M'O} = \frac{b}{a}$$

و یا

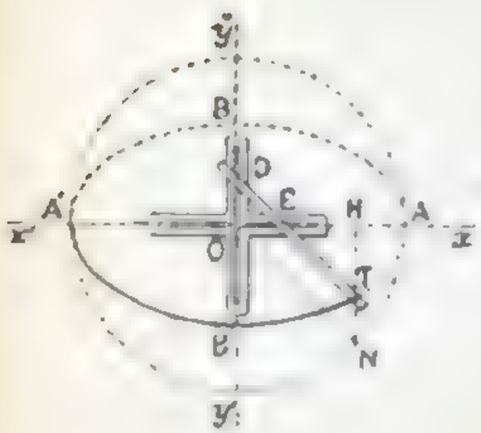
$$PM = PM' \times \frac{b}{a}$$

پس برای بدست آوردن نقطهٔ M' باید عرض نقطهٔ M را در عدد مثبت $\frac{b}{a}$ ضرب کنیم و طول آنرا تغییر ندهیم و نظر بشمارهٔ ۸۴۳ مکان نقطهٔ M عبارتست از یك‌بیضی. مرکز این‌بیضی نقطهٔ O است و دورأسش A_1 و A'_1 روی x'x و دو رأس دیگرش B_1 و B'_1 روی y'y واقعند.

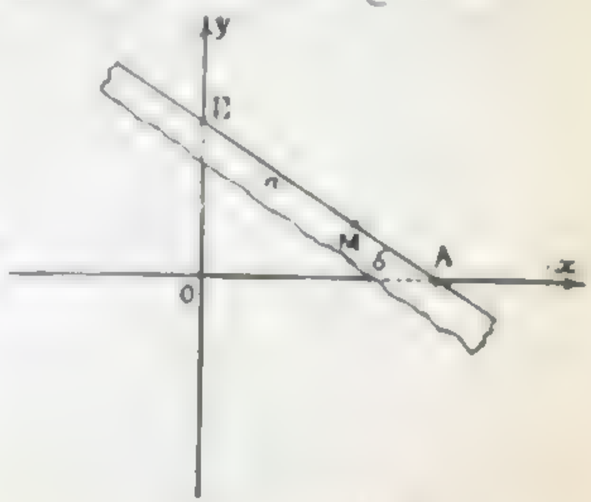
طوریکه $OA_1 = a$ و $OB_1 = b$

تبصره ـ وسط قطعه‌خط AB روی یك‌دایره حرکت میکند

۸۵۴ ـ ترسیم بیضی بوسیلهٔ نقطه‌یابی ـ برای ترسیم یك‌بیضی که طولهای دو محورش 2a و 2b باشد نظر بقضیهٔ فوق کافیست دو خط x'Ox و y'Oy را عمود برهم رسم کرده (ش ٦٦٤) نواری از کاغذ که لبهٔ آن خط‌راست باشد اختیار کنیم و روی آن سه‌نقطهٔ A و B و M را چنان اختیار کنیم که MA = b و MB = a باشد و نوار کاغذرا روی‌صفحه‌طوری حرکت‌دهیم که نقطهٔ A روی خط x'Ox ونقطهٔ B روی‌خط y'Oy حرکت کند مواضع مختلف نقطهٔ M روی بیضی مطلوب واقع هستند.



(ش ٦٦٥)



(ش ٦٦٤)

تبصره ـ ممکن است نقاط A و M و B را دو نوع روی لنگه اختیار کرد: درشکل ٦٦٣ نقاط A و B در یک‌طرف M و در شکل ٦٦٤ در دوطرف آن اختیار شده‌اند.

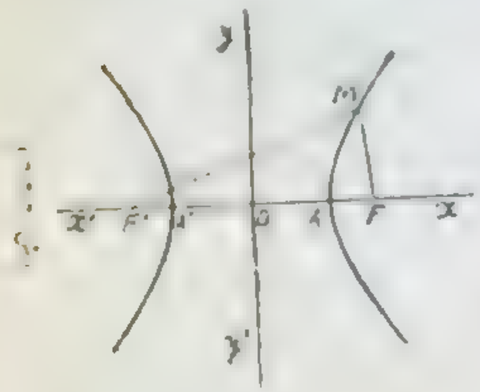
۸۵۵ ـ بیضی‌نگار ☆ ـ با استفاده از قضیهٔ شمارهٔ ۸۵۳ افزاری بنام بیضی‌نگار برای ترسیم بیضی میسازند. چگونگی عمل با این اسباب و دلیل آن از روی شکل ٦٦٥ پیداست

۲ ـ هذلولی

۸۵٦ ـ تعریف ـ **درهرصفحه مکان‌هندسی نقاطی که تفاضل فواصلشان از دو نقطهٔ معلوم واقع درهمان صفحه مساوی باطول معینی میباشد یك منحنی است که آنرا هذلولی مینامند**

دو نقطهٔ معلوم را **کانونهای هذلولی** میگویند. اگر کانونهای هذلولی را F و F' و طول معین مزبور را 2a بنامیم (ش ٦٦٦) شرط لازم و کافی برای آنکه نقطه‌ای مانند M روی هذلولی باشد اینست که داشته باشیم

$$|MF - MF'| = 2a \qquad (1)$$



هریك از قطعه خطهای MF و MF' را **شعاع حامل** نقطهٔ M و فاصلهٔ F'F را **فاصلهٔ کانونی** هذلولی میگویند و این فاصله را معمولا 2c مینامند

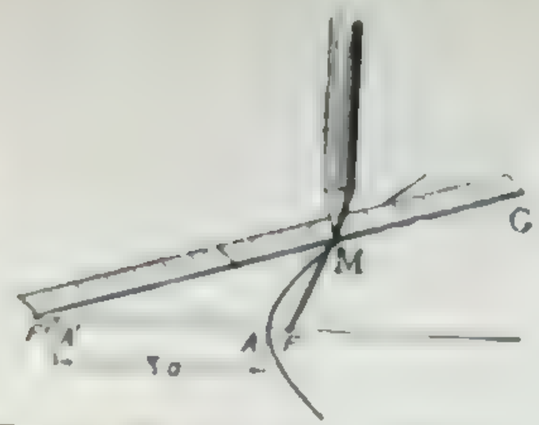
$AA' = 2a$
$FF' = 2c$

اگر نقطه‌ای مانند M روی‌خط راست F'F واقع نباشد تفاضل‌شعاع حاملهای آن یعنی $|MF - MF'|$ از 2c کوچکتر است زیرا در مثلث MFF' میتوان نوشت: $|MF - MF'| < FF'$

اگر نقطهٔ M روی قطعه‌خط F'F واقع باشد بازهم $|MF - MF'|$

☆ Ellipsographe

از 2c کوچکتر است ولی اگر نقطه M روی نیم‌خط Fx' واقع باشد که از امتداد دادن FF' حاصل میشود (ش ٦٦٦) و نیم‌خط حاصل شعاع حاملهای آن یعنی $|MF - MF'| = 2c$ میشود



از آنچه گفته شد معلوم میشود که 2a را از 2c کوچکتر اختیار کرد. یك هذلولی با در دست بودن کانونها و تفاضل شعاع حاملهای یکی از نقاط مشخص میشود

۸۵۷ ـ مرکز و محورها و رأسهای هذلولی ـ فرض میکنیم F و F' کانونهای یك هذلولی و 2a تفاضل شعاع حاملهای یکی از نقاط آن باشد. همانطور که در مورد بیضی دیدیم (شمارهٔ ۸۲۲) و بهمان دلیل:

خط‌کشی اختیار و یك سر آنرا طوری در نقطهٔ F' ثابت میکنیم که خط‌کش بتواند دورصفحه حرکت و حول نقطهٔ F' دوران کند و یك‌سر نخی را در نقطهٔ F وسیلهٔ تکه‌ساق ثابت نگاه میداریم و سر دیگرش را در نقطهٔ G بخط‌کش متصل میکنیم و وسیلهٔ نوك مدادی نخ را میکشیم تا قسمت MG از آن برخط‌کش منطبق شود و قسمت MF از آن راست باشد. در اینصورت اگر نوك مداد را حرکت‌دهیم بطوریکه همواره برنخ متکی باشد نوك مداد یك هذلولی رسم میکند زیرا:

$$MF' - MF = (MF' + MG) - (MF + MG)$$

مقدار ثابت = طول نخ − طول خط‌کش =

وسط قطعه‌خط F'F که آنرا O مینامیم مرکز تقارن هذلولی است. نقطهٔ O را مرکز هذلولی میگویند

خط راست F'F و عمود منصف قطعه‌خط F'F محورهای تقارن هذلولی هستند

هر نقطه که روی یکی از دو نیم‌خط Fx و F'x' که از امتداد دادن FF' بدست میآیند واقع باشد تفاضل شعاع حاملهایش مساوی با 2c است

(ش۶۶۶) بنابراین هیچیک از نقاط هذلولی روی این دو نیم‌خط واقع نیستند.

اگر A یکی از نقاط قطعه خط FF' باشد و بین نقاط O و F واقع باشد از دوشعاع حامل نقطهٔ A آنکه بزرگتر است مساویست با OA+c و آنکه کوچکتر است مساویست با c−OA پس تفاضل این دوشعاع حامل مساویست با ۲OA و برای آنکه نقطهٔ A روی هذلولی باشد لازم و کافیست که a=OA باشد. دراینصورت نقطهٔ A' قرینهٔ A نسبت بنقطهٔ O نیز روی هذلولی است. پس نقاط A و A' متعلق بخط راست x'x که از نقطهٔ O فاصلهٔ a واقع هستند روی هذلولی میباشند (ش ۶۶۶) دو نقطهٔ A و A' را **رأسهای هذلولی** مینامند.

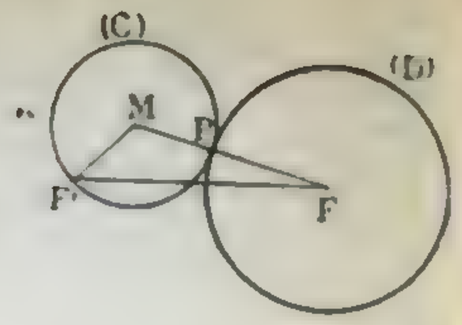
هر نقطه که روی خط y'y (عمود منصف قطعه خط FF') واقع باشد از F و F' یک فاصله است بنابراین خط y'y با هذلولی نقطهٔ مشترکی ندارد.

خط x'x را **محور کانونی** یا **محور قاطع هذلولی** و خط y'y را **محور غیر قاطع هذلولی** مینامند. گاهی نیز قطعه خط AA' را **محور کانونی هذلولی** میگویند

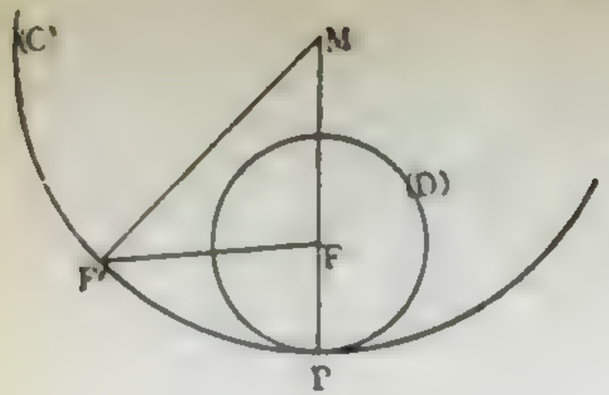
خط y'y صفحه را بدو نیم‌صفحه تقسیم میکند. اگر نقطه‌ای مانند M با کانون F دریک نیم صفحه واقع باشد شعاع حامل MF' از شعاع حامل MF بزرگتر است وبرای نقاطی از هذلولی که دراین نیم‌صفحه واقعند داریم MF'−MF=۲a ولی برای نقاطی از هذلولی که درنیم‌صفحهٔ دیگر (نیم‌صفحه‌ای که شامل F' است) واقعند داریم MF−MF'=۲a

۸۵۸ - دایره‌های هادی هذلولی - فرض میکنیم F و F' کانونهای یک هذلولی و ۲a تفاضل شعاع حاملهای یکی از نقاط آن مانند M باشد

اولا اگر MF−MF'=۲a باشد (ش ۶۶۸) دایرهٔ (C) که بمرکز M و بشعاع MF' رسم شود قطعه‌خط MF را درنقطه‌ای مانند P قطع میکند بطوریکه P بین M و F واقع میشود و FP=۲a بنابراین دایرهٔ (C) با دایرهٔ (D) که بمرکز F و ۲a رسم شود در نقطهٔ P مماس خارج است.



(ش ۶۶۸)



(ش ۶۶۹)

ثانیاً اگر MF'−MF=۲a باشد (ش ۶۶۹) دایرهٔ (C) که مرکز M و بشعاع MF' رسم شود امتداد شعاع حامل MF را درنقطه‌ای مانند P قطع میکند بطوریکه F بین M و P واقع میشود و FP=۲a بنابراین دایرهٔ (C) با دایرهٔ (D) که مرکز F و بشعاع ۲a رسم شود در نقطهٔ P مماس داخل است

برعکس - فرض میکنیم نقطهٔ M مرکز دایره‌ای مانند (C) باشد که از نقطهٔ F' بگذرد و در نقطه‌ای مانند P با دایرهٔ (D) مماس شود اگر (C) و (D) مماس خارج باشند (ش ۶۶۸) فاصلهٔ مراکز آنها یعنی MF' مساویست با مجموع دوشعاع آنها یعنی MF'+۲a و در اینصورت MF'−MF=۲a اما اگر دو دایرهٔ (C) و (D) مماس داخل باشند (ش ۶۶۹) چون نقطهٔ F' درخارج دایرهٔ (D) واقع است دایرهٔ (D) در داخل دایرهٔ (C) واقع میشود و فاصلهٔ مراکز آنها یعنی MF مساویست با تفاضل دو شعاع آنها یعنی MF'−۲a و دراینصورت داریم MF'−MF=۲a و در هردو صورت نقطهٔ M روی هذلولی واقع است

دایره‌ای که مرکزش یکی از دو کانون هذلولی مثلا F' و شعاعش ۲a باشد دایره‌هادی هذلولی نظیر کانون F' نامیده میشود.

[illegible] خاصیت مهم هذلولی را بیان میکند

قضیه - هرهذلولی مکان هندسی مراکز دایره‌هایست که

از یکی از دو کانون آن بگذرند و با دایرهٔ هادی نظیر کانون دیگر هذلولی مماس باشند.

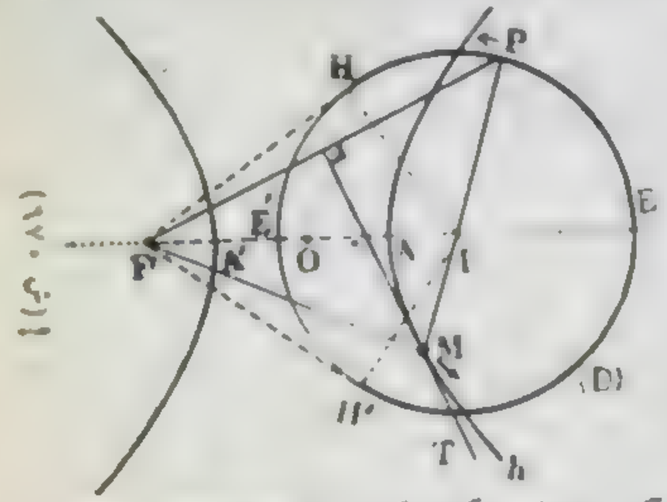
تبصره ـ اگر بنقطه‌ای مانند (D) و نقطه‌ای مانند F' خارج از آن در نظر بگیریم نظر باستدلال فوق :

مکان هندسی مراکز دایره‌هایی که بادایرهٔ معلوم (D) مماس باشند و از نقطهٔ F' که در خارج دایرهٔ (D) واقع است بگذرند یک هذلولی است.

نقطهٔ F' یکی از کانونهای این هذلولی و دایرهٔ (D) دایرهٔ هادی نظیر کانون دیگر آن میباشد.

۸۵۹ ـ ترسیم هذلولی بوسیلهٔ نقطه‌یابی ـ یک نقطه مانند P روی دایرهٔ هادی (D) نظیر کانون F' اختیار میکنیم. میتوان نقطهٔ P را نقطهٔ تماس دایرهٔ (D) بادایره‌ای مانند (C) دانست که از کانون F' بگذرد و با دایرهٔ (D) مماس شود

مرکز دایرهٔ (C) روی هذلولی واقع است. این مرکز عبارتست از نقطهٔ M محل مشترک خط FP با عمودمنصف قطعه‌خط $F'P$. این دوخط در



(ش ۶۷۰)

صورتی یکدیگر را قطع میکنند که زاویهٔ FPF' قائمه نباشد. پس اگر از نقطهٔ F' دومماس بردایرهٔ (D) رسم کنیم و نقاط تماس آنها را H و H' بنامیم درصورتی دوخط مزبور یکدیگر را قطع میکنند که نقطهٔ P بر هیچیک از نقاط H و H' منطبق نباشد. نقاط H و H' دایرهٔ (D) را بدو کمان تقسیم میکنند که یکی از آنها کوچکتر از نیمدایره ودیگری بزرگتر از نیمدایره است.

اگر نقطهٔ P روی کمان بزرگتر از نیمدایرهٔ HEH' واقع باشد (ش ۶۷۰)

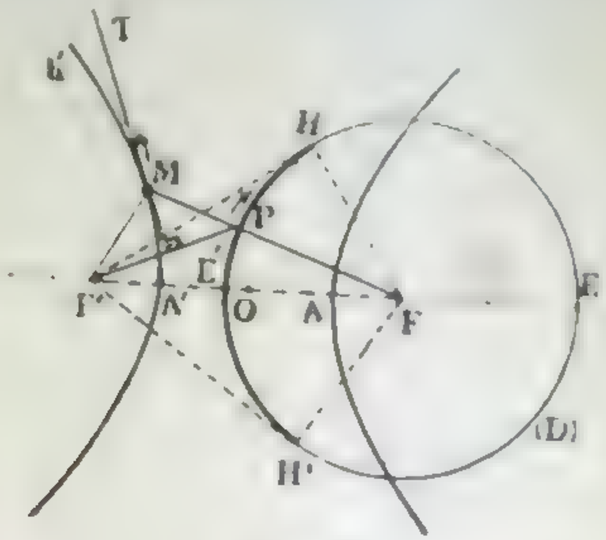
زاویهٔ FPF' حاده است و عمودمنصف قطعه‌خط $F'P$ که آنرا T مینامیم امتداد قطعه‌خط FP ازطرف F را در نقطهٔ M قطع میکند و داریم :

$$MF' - MF = 2a$$

اما اگر نقطهٔ P روی کمان کوچکتر از نیمدایرهٔ $HE'H'$ واقع باشد (ش ۶۷۱) زاویهٔ FPF' منفرجه است وعمودمنصف قطعه‌خط $F'P$ که آنرا T مینامیم امتداد قطعه خط FP ازطرف P را در نقطهٔ M قطع میکند و داریم :

$$MF - MF' = 2a$$

تبصره ـ اگر نقطهٔ P برنقطهٔ E واقع روی محور کانونی منطبق



(ش ۶۷۱)

شود M برروأس A از هذلولی قرار میگیرد (ش ۶۷۰) و اگر نقطهٔ P کمان کوچکتر ازنیمدایرهٔ EH را از E بطرف H بپیماید و به H نزدیک شود قطعه خط $F'P$ رفته رفته بسمت قطعه خط $F'H$ میل میکند و خط T رفته‌رفته بسمت عمودمنصف قطعه‌خط $F'H$ میل مینماید بطوریکه وقتی نقطهٔ P برنقطهٔ H منطبق شود خطوط FP و T باهم موازی میشوند ونقطهٔ M که همواره روی هذلولی است بینهایت از نقطهٔ A دورمیشود پس نظیر کمان EH از دایرهٔ هادی قسمت Ah از هذلولی بدست میآید (ش ۶۷۰) نظیر کمان EH' ازدایرهٔ هادی قرینهٔ قسمت Ah از هذلولی نسبت بمحور کانونی بدست میآید.

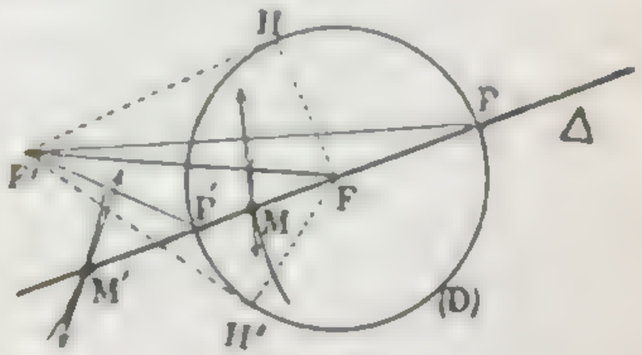
اگر نقطهٔ P برنقطهٔ E' واقع روی محور کانونی منطبق شود M برروأس A' از هذلولی قرار میگیرد (ش ۶۷۱) و اگر P کمان کوچکتر از نیمدایرهٔ $E'H$ را از E' بطرف H بپیماید و به H نزدیک شود نقطهٔ M

نسبت $A'h'$ از هذلولی را می‌پیماید و بنهایت از نقطهٔ A' دور میشود.
ضرکمان $E'H'$ از دایرهٔ هادی قرینهٔ نسبت $A'h'$ از هذلولی نسبت بمحور کانونی بدست میآید.

نظر بآنچه گفتیم نظیر دو کمان HH' از دایرهٔ هادی دو شاخه از هذلولی بدست میآید. یکی از این دو شاخه از نقطهٔ A و شاخهٔ دیگر از نقطهٔ A' میگذرد. شاخهٔ اول را شاخهٔ $[F]$ و شاخهٔ دوم را شاخهٔ $[F']$ مینامیم.
[illegible] $[F]$ واقع [illegible] هادی (D) مماس [illegible] (ش ۶۶۹) و [illegible] $[F]$ واقع [illegible] F میگذرد [illegible] (D) مماس خارج [illegible] (ش ۶۶۸) [illegible] M روی [illegible] $[F]$ [illegible] $MH = MF$ [illegible] $[F']$ [illegible] $MH' = MF'$

۸۶۰ - قطع مشترک هذلولی با یک خط راست - [illegible] L را [illegible] A و A' و شعاع [illegible] L [illegible]

حالت اول - خط L از یکی از کانونهای هذلولی میگذرد. فرض میکنیم خط راست Δ از کانون F بگذرد و وصل مشترکهای خط Δ را [illegible] (ش ۶۷۲) [illegible]



(ش [illegible])

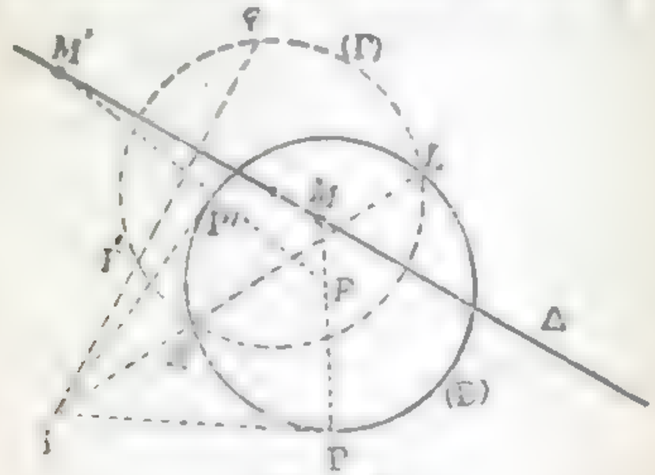
خط L [illegible] L [illegible] مرکز [illegible] F [illegible] مماس [illegible]

هستند و نقاط تقاطع هذلولی با خط L عبارتند از نقاط M و M' وصل مشترکهای Δ با عمودمنصفهای دو قطعه‌خط FP و $F'P'$ از آنچه گذشت نتیجه میشود که

هر خط راست که از یکی از کانونهای هذلولی مثلاً از کانون F بگذرد هذلولی را در دو نقطه قطع میکند. [illegible] خطوط راست FH و FH' که از نقاط H و H' میگذرند [H و H' نقاط تماس مماسهای هستند که از F بر دایرهٔ (D) رسم شوند]

اگر L بر یکی از خطوط FH و FH' منطبق شود یکی از نقاط وصل مشترک L با هذلولی روی خط L بنهایت دور میشود. برای خاطر نشان کردن این مطلب میگویند که هر یک از خطوط راست FH و FH' هذلولی را در یک نقطهٔ بفاصلهٔ معین و در یک نقطهٔ واقع در بینهایت دور قطع میکنند.

حالت دوم - خط L از هیچیک از کانونهای هذلولی نمیگذرد - قرینهٔ کانون F را نسبت بخط L نقطهٔ φ مینامیم (ش ۶۷۳) هر دایره که از نقطهٔ F' بگذرد و مرکزش روی خط L واقع باشد از نقطهٔ φ نیز خواهد گذشت و برعکس هر دایره که از نقاط F' و φ بگذرد مرکزش روی Δ واقع خواهد بود. پس برای [illegible] مشترکهای خط L با هذلولی



(ش ۶۷۳)

باید مراکز دایره‌هایی را که از نقاط F' و φ میگذرند و بر دایرهٔ هادی (D) نظیر کانون F مماس هستند تعیین کنیم. [illegible] این دایره‌ها نقاط تقاطع خط L با هذلولی هستند

این مسئله را درشمارهٔ ۴۷۱ (صمیم مقالات سوم وچهارم) حل کرده ودر ذیل شمارهٔ ۸۲۵ در مورد سعی تکرار کرده‌ایم و در اینجا ر ه حل آنرا یادآوری میکنیم.

دایره‌ای مانند (Γ) رسم‌میکنیم که مرکزش روی‌خط Δ واقع‌باشد و از نقطهٔ F' بگذرد و دایرهٔ هادی (D) نظیر کانون F را در دو نقطه مانند L و K قطع کند (این‌دایره از نقطهٔ φ نیز خواهد گذشت) خطوط راست KL و F'φ بکدیگر را درنقطه‌ای مانند I قطع میکنند. ازنقطهٔ I مماسهای IP و IP' را بردایرهٔ (D) رسم‌میکنیم. نقاط P و P' نقاط‌تماس دایره‌های مذکور با دایرهٔ هادی (D) میباشند و مراکز این دایره‌ها از طرفی‌روی خط Δ وازطرف‌دیگرروی‌خطوط FP و FP' واقعند. پس‌اگر فصل‌مشترک FP را با Δ نقطهٔ M و فصل‌مشترک F'P را با Δ نقطهٔ M' بنامیم نقاط M و M' نقاط تقاطع خط با هذلولی هستند.

بحث ـ با استدلالی شبیه آنچه درمورد بیضی گفتیم معلوم‌میشود که اگر نقطهٔ φ درخارج دایرهٔ هادی (D) باشد ولی‌روی هیچیک‌از دومماسی که از نقطهٔ F' بر دایره هادی رسم میشوند واقع نباشد خط Δ هذلولی را در دونقطه قطع میکند. اگر نقطهٔ φ در داخل دایرهٔ (D) واقع باشد خط Δ باهذلولی نقطهٔ مشترکی ندارد

اگر نقطهٔ φ روی دایرهٔ (D) واقع باشد ولی بر نقاط H و H' منطبق‌نباشد☆ خط Δ باهذلولی فقط دریک‌نقطه‌مشترک‌است☆☆ واین‌نقطه عبارتست از فصل‌مشترک Δ با Fφ. در شمارهٔ ۸۶۲ ثابت میکنیم که در اینصورت خط Δ با هذلولی مماس است

۸۶۱ ـ حالات خاص

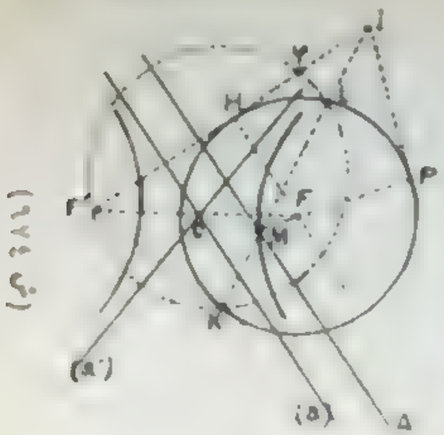
الف ـ مجانب‌های هذلولی ـ ممکن است خط Δ بریکی از مماسهایی که از نقطهٔ F' بردایرهٔ هادی (D) رسم میشوند عمود باشد.

مثلا فرض میکنیم خط Δ بر F'H عمود باشد. در اینصورت یکی‌از نقاط تماس مماسهایی که از نقطهٔ I بردایرهٔ (D) رسم‌میشوند مثلا P' بر H منطبق است. و نقطه‌ای از هذلولی که نظیر نقطهٔ H از دایرهٔ هادی (D) میباشد در بینهایت دور روی خط FH و همچنین روی خط Δ که با

* نقاط H و H' نقاط تماس مماسهایی هستند که از F' بردایرهٔ (D) رسم‌شوند

☆☆ دراین‌مورد گاهی نیزمیگویند که‌خط Δ باهذلولی دردو نقطه که بر هم منطبق هستند مشترک است

FH موازیست واقع میباشد. بنظر مماس IP نقطهٔ M از هذلولی که در فصل‌مشترک FP و Δ میباشد بدست میآید. در اینحالت خط Δ فقط دریک نقطه که در فاصلهٔ معین واقع است هذلولی را قطع میکند. حال فرض میکنیم که خط Δ بموازات خود حرکت کند و همه‌رمنه سودمنصف قطعه‌خط F'H که آنرا خط (a) مینامیم نزدیک و بالاخره بر آن منطبق‌شود (خط a ازمرکزهذلولی میگذرد) در اینصورت نقطهٔ H منطبق میشود ونقاط I و P نیز بر H منطبق میگردند و نقطهٔ M روی هذلولی بینهایت دورمیشود بنابراین وقتی Δ بموازات خود حرکت میکند و بر a منطبق میشود M روی هذلولی بینهایت دور میشود و در عین حال فاصله‌اش از خط a بسمت صفر میل میکند. برای بیان این مطلب میگویند که **خط (a) مجانب‌هذلولی میباشد**. حضراست a' که‌قرینهٔ خط راست a نسبت بمحور کانونی هذلولی میباشد نیز مجانب هذلولی است بنابراین



(ش ۲۸۶)

خطوط راست a و a' که از مرکزهذلولی‌بترتیب‌بر F'H و F'K عمود شوند مجانبهای هذلولی میباشند.

ب ـ اگر خط‌راست Δ برمحور کانونی هذلولی عمود باشد برای آنکه نقطهٔ φ در خارج دایرهٔ هادی (D) قرار گیرد یعنی برای آنکه Δ هذلولی‌را قطع کند لازم و کافیست که فصل‌مشترک خط Δ بامحور کانونی مابین رأسهای A و A' واقع باشد

نتیجهـ از آنچه گذشت نتیجهٔ زیر بدست میآید

خط‌راست Δ راکه با هیچیک‌از مجانب‌های هذلولی موازی نیست درنظر میگیریم

اولا اگر نقطهٔ φ یعنی قرینهٔ کانون F' نسبت بخط Δ در خارج‌دایرهٔ‌هادی (D) نظیر کانون F واقع‌باشد خط Δ هذلولی را در دونقطهٔ قطع میکند.

ثانیاً اگر نقطهٔ φ در داخل دایرهٔ (D) واقع باشد خط Δ هذلولی را قطع نمیکند.

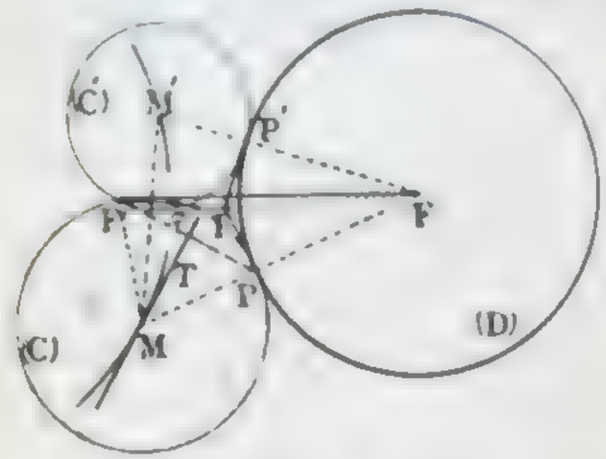
ثالثاً اگر نقطهٔ φ روی دایرهٔ (D) واقع باشد خط Δ فقط در یك نقطه باهذلولی مشترك است.

هرخط راست که بایکی از مجانبهای هذلولی موازی باشد هذلولی را فقط دریك نقطه قطع میکند.

خط مماس برهذلولی در یکی از نقاط آن

۸۶۲ـ همانطور که درمورد بیضی گفتیم (شمارهٔ ۸۲۶) برای تحقیق آنکه دریك نقطه مانند M ازهذلولی خط مماس برهذلولی وجود دارد باید دونقطهٔ مجاور M و M' را روی هذلولی درنظر بگیریم و تحقیق کنیم که اگر نقطهٔ M' رفته‌رفته بنقطهٔ M نزدیك و بالاخره بر آن منطبق شود خط قاطع MM' سمت وضع حدی میل میکند یا نه.

فرض میکنیم F و F' کانونهای یك هذلولی و (D) دایرهٔ هادی آن هذلولی نظیر کانون F باشد و دونقطهٔ مجاور M و M' را روی یك شاخهٔ این هذلولی درنظر میگیریم (ش ۶۷۵)



(ش ۶۷۵)

میدانیم که دایره‌های (C) و (C') که از نقطهٔ F' میگذرند ومراکز آنها نقاط M و M' میباشند بادایرهٔ (D) در نقاطی مانند P و P' مماس هستند. این دودایره یکدیگر را در نقطهٔ دیگری مانند φ که قرینهٔ نقطهٔ F' نسبت بخط MM' است قطع میکنند [illegible] دایرهٔ (D) و

(C) و (C') عبارتست از نقطهٔ I محل مشترك φF' باعماسهایی که در نقطه P و P' بردایرهٔ (D) رسم میشوند

هرگاه نقطهٔ M ثابت بماند و نقطهٔ M' روی هذلولی حرکت کند و رفته‌رفته بنقطهٔ M نزدیك و بالاخره بر آن منطبق شود نقطهٔ P' روی دایرهٔ (D) حرکت خواهد کرد ورفته‌رفته بنقطهٔ P نزدیك و بالاخره بر آن منطبق خواهد شد وخط FI که نیمساز زاویهٔ PFP' است برخط FP منطبق خواهد گشت. درایصورت نقطهٔ I برنقطهٔ P وخط φF' برخط FP منطبق خواهد شد وخط MM' که [illegible] عمود منصف قطعه‌خط FP که آن [illegible] T درنقطهٔ M برهذلولی مماس است

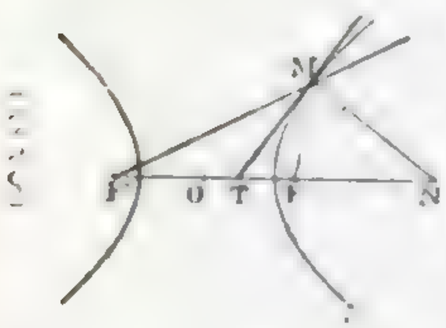
این نکته شایستهٔ دقت است که خط مماس MT خط نیمساز زاویهٔ دو شعاع حامل نقطهٔ M یعنی نیمساز زاویهٔ FMF' میباشد (ش ۶۷۵)

از اینجه [illegible] نتیجه میشود که

قضیه ـ درهرنقطه مانند M از هذلولی یك خط مماس بر هذلولی وجود دارد و این خط مماس خط نیمساز زاویهٔ دو شعاع حامل نقطهٔ M میباشد.

[illegible] نقطهٔ M برهذلولی [illegible] مماس بر آن نقطه برهذلولی برمحور کانونی عمود است

۸۶۳ ـ تبصره ـ طریقهٔ ترسیم هذلولی بوسیلهٔ نقطه‌یابی که در شمارهٔ ۸۵۹ شرح دادیم دارای [illegible] خاصیت جالب توجه است که عمود منصف قطعه خط P'P که از مرکز [illegible] باامتداد شعاع FP متعلق بدایره [illegible] (D) نقطهٔ M از هذلولی بدست میآید خودش خط مماس برهذلولی درنقطهٔ M میباشد

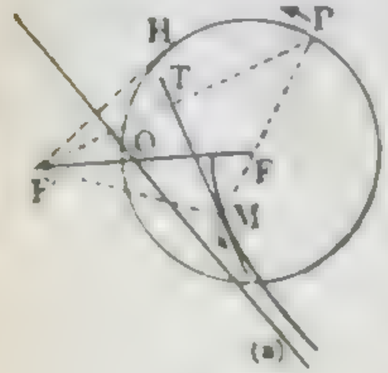


۸۶۴ ـ قائم برهذلولی ـ خط قائم بر هذلولی دریکی از نقاط آن مانند M عبارتست از خط راستی که در نقطهٔ M برمماس MT عمود

شود (ش ۶۷۶) واضح است که خط قائم بر هذلولی در نقطه M [illegible] و [illegible] آن بدست میآید.

تمرین - تمرین‌هایی را که در ذیل شمارهٔ ۸۲۸ (صفحهٔ ۱۰) در مورد بیضی ذکر کرده‌ام درمورد هذلولی بیان و ثابت کنید.

۸۶۵ - حد اوضاع خط مماسی که نقطهٔ تماس آن روی هذلولی بینهایت‌دور شود - اگر نقطهٔ P روی دایرهٔ هادی (D) رفته [illegible] نقطهٔ M روی هذلولی [illegible] دور میشود وخط مماس MT [illegible] عمود منصف قطعه خط F'H یعنی سمت مجانب (a) میل میکند یعنی [illegible]



[illegible] خط مماس بر هذلولی

۸۶۶ - درشکل ۶۷۵ دیده میشود که نقطهٔ P از دایرهٔ هادی نظیر کانون F عبارتست از قرینهٔ کانون F' نسبت بخط مماس MT

برعکس قرینهٔ کانون F' را نسبت بیك خط راست مانند T نقطهٔ P مینامیم. اگر نقطهٔ P روی دایرهٔ هادی نظیر کانون F واقع باشد امتداد شعاع FT خط T را در نقطه‌ای مانند M قطع میکند. نقطهٔ M روی هذلولی است (شمارهٔ ۸۵۹). و خط T درنقطهٔ M برهذلولی مماس است (شمارهٔ ۸۶۲)

واز مطالب فوق قضیهٔ زیر بدست میآید:

قضیهٔ ۱ - برای آنکه یك خط راست با یك هذلولی مماس باشد لازم و کافیست که قرینهٔ یکی از دو کانون هذلولی نسبت بآن خط روی دایرهٔ هادی نظیر کانون دیگر واقع باشد.

---

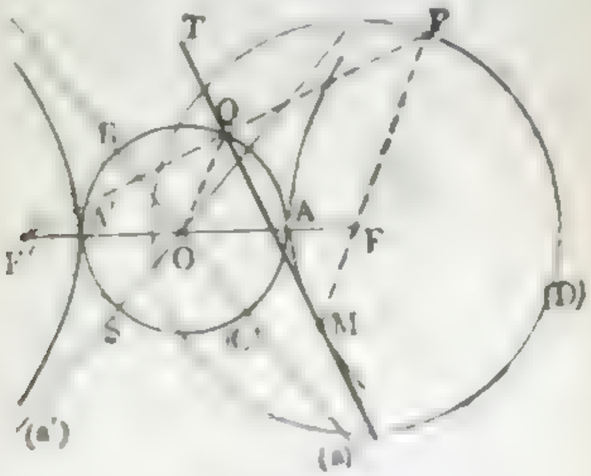
* نقطهٔ H نقطهٔ تماس مماسی است که از نقطه F' بر دایرهٔ هادی (D) رسم شود

[illegible]

مکان هندسی قرینه‌های یکی از دو کانون هذلولی نسبت بخطوط مماس بر آن عبارتست از دایرهٔ هادی نظیر کانون دیگر.

۸۶۷ - نتیجه - عمودمنصف‌های قطعه‌خط‌هایی که نقاط مختلف یك [illegible] وصل میکنند همگی [illegible] هذلولی و نقطهٔ ثابت مذکور کانون دیگر این هذلولی میباشد

۸۶۸ - دایرهٔ اصلی هذلولی - عمود وارد بر کانون F روی مماس MT عبارتست از نقطهٔ Q وسط قطعه‌خط F'P و اگر وسط قطعه‌خط F'F یعنی



(ش ۶۷۸)

مرکز هذلولی را O نامیم (ش ۶۷۸) و O را به Q وصل کنیم قطعه خط OQ که اوساط دوضلع ازمثلث F'PF را بهم وصل میکند مساوی با نصف ضلع FP میباشد و چون FP = ۲a پس OQ = a و نظر باینکه نقطهٔ O ثابت است وقتی نقطهٔ M روی هذلولی و نقطهٔ P روی دایرهٔ هادی (D) نظیر کانون F حرکت کند نقطهٔ Q روی دایرهٔ (C) که مرکزش O و شعاعش a است تغییر مکان میدهد. دایرهٔ (C) را **دایرهٔ اصلی هذلولی** مینامند. محور کانونی هذلولی یعنی A'A یکی ازقطرهای این دایره میباشد.

برعکس اگر نقطهٔ Q یکی از نقاط دایرهٔ اصلی هذلولی باشد واز نقطهٔ Q عمود QT را بر خط F'Q اخراج کنیم و قرینهٔ F' را نسبت بخط QT نقطهٔ P بنامیم واضح است که FP = ۲a یعنی نقطهٔ P روی دایرهٔ هادی

نظیر کانون F واقع میباشد پس خط QT برهذلولی مماس است.

واضح‌است که عین استدلال فوق را میتوان در بارهٔ تصویر کانون F برمماس MT تکرار کرد. دراین‌مورد بایدبجای دایرهٔ هادی نظیر کانون F دایرهٔ هادی نظیر کانون F' را در نظر بگیریم

از آنچه گذشت قضیهٔ زیر حاصل میشود :

قضیهٔ ۳ - برای آنکه یك‌خط راست با یك هذلولی مماس باشد لازم و کافیست که تصویر یکی‌از دو کانون هذلولی بر آن خط متعلق بدایرهٔ اصلی هذلولی باشد.

این قضیه را میتوان بصورت زیر نیز بیان کرد

مکان‌هندسی تصاویر هریك‌ازدو کانون هذلولی برخطوط مماس برآن عبارتست از دایرهٔ اصلی هذلولی.

۸۶۹ - تبصره - در شکل ۶۷۸ واضح است که

$\frac{F'F}{F'O} = \frac{F'P}{F'Q} = ۲$ یعنی دایرهٔ هادی (D) در تجانسی که مرکزش نقطهٔ F' و نسبتش ۲ باشد مجانس دایرهٔ اصلی است. بنابراین مماسهای مشترك خارجی دودایرهٔ (D) و (C) از نقطهٔ F' میگذرند. عبارت دیگر اگر از F' مماس F'R را بردایرهٔ (C) رسم کنیم این‌خط‌مماس بردایرهٔ (D) نیز در نقطه‌ای مانند H مماس است و نقطهٔ R وسط قطعه‌خط F'H میباشد و [illegible] در شمارهٔ (۸۶۲) [illegible] دایرهٔ مجانبهای هذلولی کنیم معلوم میشود که [illegible] OR که آن [illegible] (a) مینامیم یکی‌از مجانبهای هذلولی است [illegible]

برای تعیین مجانبهای هذلولی بکمك دایرهٔ اصلی آن کافیست ازیکی‌از دو کانون هذلولی مثلا از F' دومماس F'R و F'S را بر دایرهٔ اصلی رسم کنیم. خطوط راست OR و OS مجانبهای هذلولی هستند.

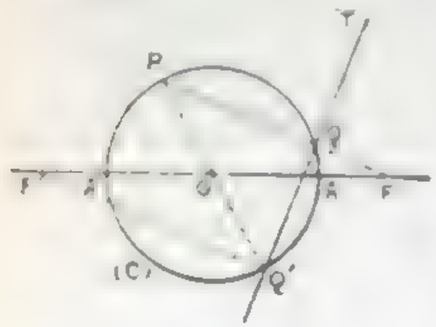
۸۷۰ - نتیجهٔ قضیهٔ ۳ - [illegible] از صفحه خود [illegible] مماس هموار روی دایرهٔ [illegible] حرکت کند و [illegible] مماس هموار از نقطهٔ [illegible] واقع در خارج دایرهٔ [illegible] بگذرد معین

ضلع دیگر آن بر هذلولی که نقطهٔ ثابت مزبور مرکز کانون آن ودایرهٔ مزبور دایرهٔ اصلی آنست همواره مماس میباشد.

تمرین - درشکل ۶۷۸ تحقیق کنید که وقتی نقطهٔ Q روی کمان $\widehat{RAS}$ از دایرهٔ اصلی حرکت کند خط‌راست QT که از نقطهٔ Q برخط F'Q عمود میشود بر شاخهٔ [F] از هذلولی مماس میباشد و اگر نقطهٔ Q روی کمان $\widehat{RA'S}$ از دایرهٔ اصلی حرکت کند خط QT بر شاخهٔ [F'] مماس میباشد و اگر نقطهٔ Q بر نقطهٔ R یا S منطبق شود خط QT بر مجانب (a) و یا (a') منطبق خواهد شد

۸۷۱ - قضیهٔ ۴ - حاصلضرب‌فواصل دو کانون هر هذلولی از یکی‌از خطوط مماس برآن مساویست‌با مقدار ثابت c^2-a^2

اگر خط T برهذلولی مماس باشد و تصاویر دو کانون F و F' را روی خط مماس T بترتیب نقاط Q و Q' بنامیم (ش ۶۷۹) نقاط Q و Q' روی دایرهٔ اصلی هذلولی واقع هستند (شمارهٔ ۸۶۸) و اگر دومین فصل مشترك خط FQ را با دایرهٔ اصلی نقطهٔ R بنامیم چون زاویهٔ Q'QR قائمه‌است خط Q'R یکی‌ازقطرهای دایرهٔ اصلی میباشد و از [illegible] مثلث OFR و OF'Q' [illegible] F'Q' = FR و مطابق شکل مصر قضیهٔ ۳۱۶ (مقالهٔ سوم) داریم :



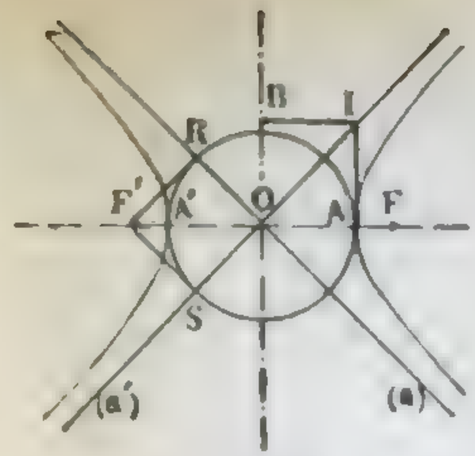
(ش ۶۷۹)

$$FQ \times FR = FA \times FA' = (c-a)(c+a) = c^2 - a^2$$

قرینهٔ آنچه درمورد بیضی کنیم درمورد هذلولی مقدارثابت c^2-a^2 را b^2 مینامند.

۸۷۲ - تبصره - درشکل ۶۷۸ دیده‌میشود که طول F'R یعنی فاصلهٔ کانون F' ازمجانب a مساویست با $\sqrt{c^2-a^2}$ (زیرا $\overline{F'R}^2 = F'O^2 - OR^2$) پس فاصلهٔ هریك از دو کانون هذلولی از هریك از مجانبهای آن مساویست با b

☆ مقصود خط راستی‌است که ضلع دیگر زاویه‌ٔ روی آن واقع است



(ش ۶۸۰)

اگر از رأس A عمودی برمحور کانونی هذلولی رسم کنیم و وصل مشترك آنرا با یکی از مجانبها نقطهٔ I بنامیم (ش ۶۸۰) مثلثهای قائم‌الزاویه OAI و OIF' متساوی‌اند و داریم

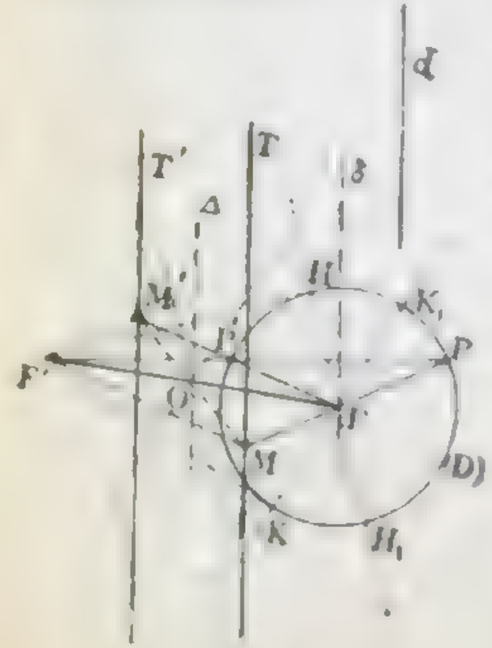
$$OI = c \quad \text{و} \quad AI = b$$

و مشاهده میشود که اگر روی محور غیر قاطع هذلولی طول OB را مساوی با b جدا کنیم مجانب (a') از دو رأس متقابل O و I از مستطیل OAIB میگذرد

اگر a و b متساوی باشند دو مجانب هذلولی برهم عمودند و در اینصورت هذلولی را **متساوی‌القطرین** مینامند

مسائل مربوط بخط مماس برهذلولی

۸۷۳ـ مسئلهٔ ۱ـ خط d است در صفحهٔ یك هذلولی مفروض است میخواهیم خط مماسی بموازات خط d برهذلولی رسم کنیم.



(ش ۶۸۱)

فرض میکنیم F و F' دو کانون هذلولی و (D) دایرهٔ هادی نظیر کانون F باشد (ش ۶۸۱) قرینهٔ کانون F' نسبت بخط مماس مطلوب از طرفی روی دایرهٔ هادی (D) نظیر کانون F (شمارهٔ ۸۶۶) و از طرف دیگر روی عمود مرسوم از نقطهٔ F' برخط d واقع است (زیرا مماس مطلوب باخط d موازیست). بنابراین اگر از نقطهٔ F' خطی بر d عمود کنیم و وصل مشترکهای آنرا با

دایرهٔ (D) نقاط P و P' بنامیم عمود منصفهای دو قطعه‌خط FP و FP' همان دو خط T و T' مماسهای مطلوب میباشند. نقاط تماس M و M' عبارتند ازفصل‌مشترکهای دومماس T و T' باخطوط راست FP و FP'

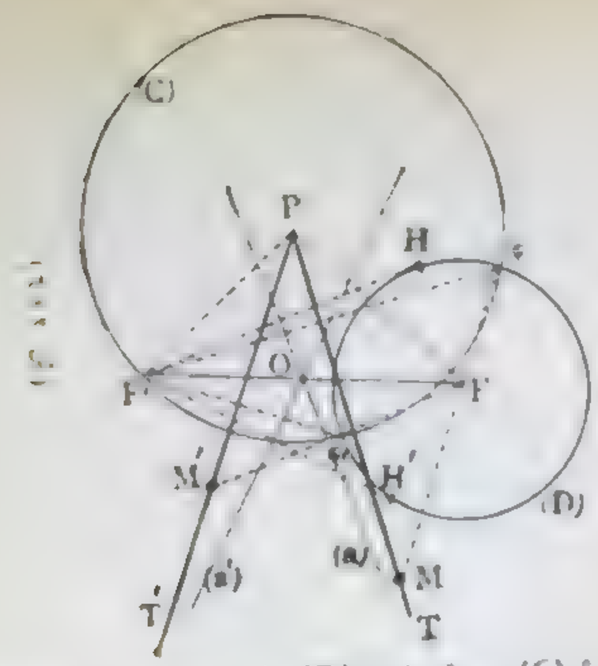
بحث ـ خطی که ازنقطهٔ F' برخط d عمودمیشود درصورتی دایرهٔ (D) را قطع میکند که این خط در زاویهٔ محدب HF'K و زاویهٔ متقابل براس آنها واقع باشد [H و K نقاط تماس مماسهایی هستند که از F' بردایرهٔ (D) رسم شده‌اند] پس اگر از F خط Fδ را بموازات d رسم کنیم برای آنکه مسئله جوابداشته‌باشد باید Fδ در زاویهٔ محدب HFK، و زاویهٔ متقابل براس آن قرار داشته باشد. اکنون ملاحظه میکنیم که اگر هردو مجانب هذلولی را بموازات خود طوری انتقال دهیم که نقطهٔ O (مرکز هذلولی) برنقطهٔ F منطبق شود زاویه‌هایی از دو مجانب که شامل کانونهای هذلولی نیستند برزاویهٔ HFK، ومتقابل براس آن منطبق میشوند و نتیجه میگیریم که برای آنکه مسئله دو جواب داشته باشد باید OΔ که از مرکز هذلولی بموازات خط معروض d رسم میشود درآن دو زاویه‌ای از زوایای دومجانب واقع شود که شامل کانونهای هذلولی نیستند (تحقیق کنید که دراینصورت خط OΔ هذلولی را قطع نخواهد کرد)

درحالت خاصی که خط d با یکی‌از مجانبهای هذلولی موازی باشد این مجانب تنها جواب مسئله است و نقطهٔ تماس آن در بینهایت دور واقع میباشد

۸۷۴ ـ تبصره ـ دو مثلث PMF' و PFP' متساوی‌الساقین هستند (ش ۶۸۱) بنابراین خطوط MF' و FP' باهم موازی میباشند و بهمین‌دلیل خطوط M'F' و FP نیزمتوازیند پس چهارضلعی MF'M'F متوازی‌الاضلاع است و بنابراین نقاط M و M' نسبت بنقطهٔ O قرینهٔ یکدیگرند

۸۷۵ ـ مسئلهٔ ۲ ـ میخواهیم از نقطهٔ معلوم F' واقع در صفحهٔ یك هذلولی مماسی برآن هذلولی رسم کنیم

فرض میکنیم F و F' دو کانون هذلولی و (D) دایرهٔ هادی نظیر کانون F باشد (ش ۶۸۲) قرینهٔ کانون F' نسبت بخط مماس مطلوب از طرفی روی دایرهٔ هادی (D) نظیر کانون F (شمارهٔ ۸۶۶) وازطرف دیگر روی دایرهٔ (C) که مرکزش P وشعاعش PF' باشد واقع است. زیرا دو نقطه که نسبت بخط مماس مطلوب قرینهٔ یکدیگر باشند از هرنقطهٔ واقع براین خط مماس واز جمله ازنقطهٔ P بیك‌فاصله واقعند



اگر دایرهٔ (C) دایرهٔ هادی (D) را در نقاط φ و φ' قطع کند میتوان از نقطهٔ P دومماس برهذلولی رسم کرد و در اینصورت میگویند **نقطهٔ P در خارج هذلولی واقع است**. این دو مماس عبارتند از عمودمنصفهای قطعه‌خطهای F'φ و F'φ' و نقاط تماس آنها M و M' بترتیب روی خطهای راست Fφ و Fφ' واقعند

اگردایرهٔ (C) بادایرهٔهادی (D) مماس‌باشد نقطهٔ P روی هذلولی واقع است (شمارهٔ ۸۵۸) و مسئله یك جواب دارد که همان مماسی است که میتوان درنقطهٔ P واقع برهذلولی برآن رسم کرد

اگر دو دایرهٔ (C) و (D) نقطهٔ مشترکی نداشته باشند نمیتوان از نقطهٔ P مماسی برهذلولی رسم کرد و دراینصورت میگویند **نقطهٔ P در داخل هذلولی واقع است.**

۸۷۶ ـ شرط آنکه نقطه‌ای مانند P درخارج یك‌هذلولی واقع باشد ـ برای آنکه نقطهٔ P درخارج هذلولی واقع باشد یعنی بتوانیم از P دومماس برهذلولی رسم کنیم لازم و کافیست که دوایر (C) و (D) متقاطع باشند (ش۶۸۲) و برای آنکه دوایر (C) و (D) متقاطع باشند لازم و کافیست که بتوانیم مثلثی بسازیم که اضلاع آن مساوی با قطعه‌خطهای PF (خط‌المرکزین دو دایره) و PF' و ۲a (شعاعهای دودایره) باشند و برای این لازم و کافیست که طول یکی‌ازاین سه قطعه‌خط از مجموع دو قطعه‌خط

دیگر کوچکتر و ازتفاضل آنها بزرگتر باشد ـ بنابراین شرط تقاطع دو دایرهٔ مزبور را میتوان چنین نوشت :

$$PF-PF' < 2a < PF+PF'$$

اما نامساوی $PF+PF' > 2a$ همواره برقرار است زیرا اگر نقطهٔ P روی محور کانونی واقع نباشد ویا روی محور کانونی ولی در خارج قطعه‌خط FF' واقع باشد داریم $PF+PF' > 2c$ و اگر P روی قطعه‌خط FF' واقع باشد داریم $PF+PF' = 2c$ پس درهرصورت نامساوی $PF+PF' > 2a$ برقرار است (زیرا $2c > 2a$)

بنابراین شرط لازم وکافی برای آنکه بتوانیم ازنقطهٔ P دومماس برهذلولی رسم کنیم اینست که داشته باشیم

$$\boxed{|PF-PF'| < 2a}$$

۸۷۷ ـ تبصره ـ اگر نقطهٔ P روی یکی از دو مجانب هذلولی واقع باشد یکی‌از نقاط φ و φ' بر یکی‌از نقاط H و H' یعنی‌نقاط تماس مماسهایی که از F' بردایرهٔ (D) رسم میشوند واقع خواهدبود (ش۶۸۲) ودر اینصورت یکی‌از مماسهای مطلوب همان‌خط مجانبی است که نقطهٔ P روی آن واقع است و نقطهٔ تماسش در بینهایت دور میباشد.

اگر نقطهٔ P برمرکز هذلولی واقع‌باشد دومماس مطلوب عبارتند از مجانبهای هذلولی

۸۷۸ ـ قضایای پونسله ـ اگر ازنقطهٔ P واقع‌درخارج یك‌هذلولی دوخط مماس برآن‌هذلولی رسم کنیم ونقاط‌تماس‌را M و M' وکانونهای هذلولی را F و F' بنامیم.

اولا خط راستی که از نقطهٔ P و از یکی از دو کانون هذلولی مثلا از کانون F میگذرد یکی از خطوط نیمساز☆ زوایای دوخط FM و FM' است ثانیاً خطوط مماس☆☆ نسبت بخط نیمساز زاویهٔ FPF' قرینهٔ یکدیگرند.

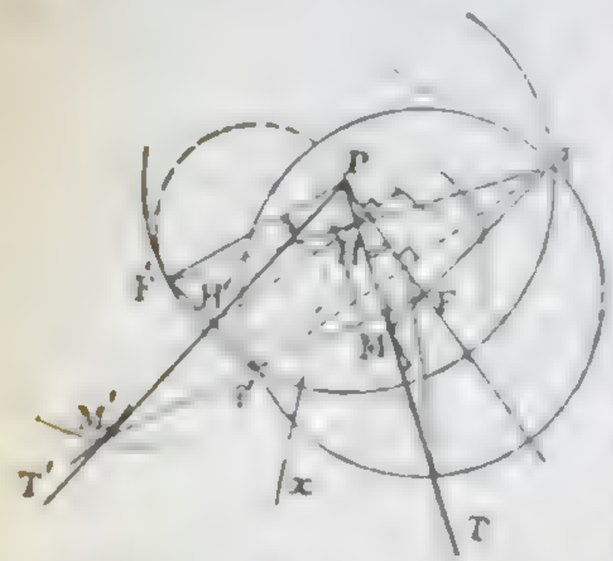
☆ از تقاطع خطوط FM و FM' چهار زاویه بوجود آید که چهار نیمساز آنها دوخط‌راست عمودبرهم تشکیل میدهند این دوخط را خطوط نیمساز زوایای دوخط FM و FM' مینامیم

☆☆ مقصود خطوط راست نامحدود PM و PM' است

اولا شکلی را که درشمارهٔ ۸۷۵ برای ترسیم مماسهای PM و PM' بکار بردیم درنظرمیگیریم (ش۶۸۳) نقاط φ و φ' یعنی مسیر انتهای دودایرهٔ (C) و (D) نسبت بخط PF که خط المرکزین دودایره مزبور است قرینهٔ یکدیگرند بنابراین داریم

$$\varphi'FP = PF\varphi$$

اما نقطهٔ M روی خط راست Fφ و نقطهٔ M' روی خط راست Fφ' واقع است پس خط FP یکی از خطوط نیمساز زوایای دوخط FM و FM' است

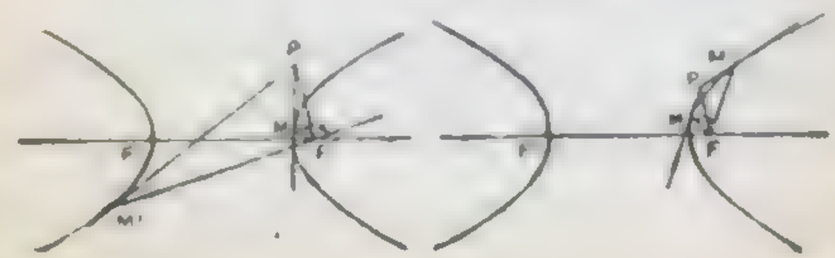


(ش ۶۸۳)

واضح است که همین خاصیت را میتوان بهمین طریق درمورد کانون F' ثابت کرد و برای این باید بجای دایرهٔ (D) دایرهٔ هادی نظیر کانون F' را در نظر گرفت☆

ثانیا تصاویر F' روی دومماس که آنها را H و H' مماسهم روی دایرهٔ بقطر PF' واقع هستند (ش ۶۸۳)

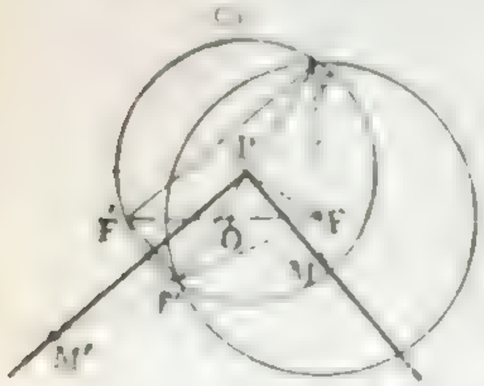
☆ **تبصره** - میتوان تحقیق کرد که اگر نقاط تماس M و M' هردو روی شاخهٔ [F] از هذلولی واقع باشند خط FP خط نیمساز زاویهٔ منعکس MFM' است و اگر نقاط تماس روی دوشاخهٔ هذلولی واقع باشند خط FP خط نیمساز زاویهٔ مکمل ومجاور زاویهٔ MFM' میباشد



و چون نقاط H و H' بترتیب در وسط قطعه خطهای PF' و PF واقعند دوخط HH' و φφ' باهم موازیند و چون خط المرکزین PF بر وتر مشترک φφ' عمود است پس PF بر HH' نیز عمود میباشد.

بنابراین در مثلث PHH' ارتفاع نظیر ضلع HH' بر PF منطبق است و قطر دایرهٔ محیطی این مثلث PF' میباشد و میدانیم (بتبصرهٔ ذیل شمارهٔ ۸۳۸ رجوع کنید) که نیمساز زاویهٔ HPH' بر نیمساز زاویهٔ FPF' منطبق است پس خطوط مماس PT و PT' نسبت بخط نیمساز زاویهٔ FPF' که آنرا Px میناميم قرینهٔ یکدیگرند.

۸۷۹ - مکان هندسی نقاطی که میتوان از آنها دو مماس عمود برهم بریک هذلولی رسم کرد - شکلی را که برای ترسیم مماسهای PM و PM' بکار بردیم در نظر میگیریم (ش ۶۸۴) از روی این شکل واضح است که برای آنکه مماسهای PM و PM' برهم عمود باشند لازم و کافیست که خطوط Pφ' و Pφ'' که برمماسهای مزبور عمودند بریکدیگر عمود باشند و برای این لازم و کافیست که خط راست φφ' ازمرکز دایره یعنی از نقطهٔ P بگذرد. چون خط φφ' محور اصلی دو دایرهٔ (C) و (D) است برای آنکه خط [illegible] از نقطهٔ P بگذرد لازم و کافیست که نقطهٔ P نسبت بدو دایرهٔ (C) و (D) دارای [illegible] مساوی باشد [illegible]



(ش ۶۸۴)

$$= \overline{PF'}^2 - \overline{PF}^2 - 4a^2$$

[مقدار سمت راست تساوی فوق قوت نقطهٔ P نسبت بدایرهٔ (D) و مقدار سمت چپ آن قوت نقطهٔ P نسبت بدایرهٔ C است]

از تساوی فوق نتیجه میشود

$$PF^2 + \overline{PF'}^2 = 4a^2 \qquad (1)$$

واگر مرکز هذلولی یعنی وسط قطعه خط FF' را O بنامیم درمثلث PFF' که PO یکی از میانه‌های آنست میتوان نوشت

$$PF'^2 + PF''^2 = 2OP^2 + 2c^2$$

ونظر برابطهٔ (۱) داریم :

$$2OP^2 + 2c^2 = 4a^2$$

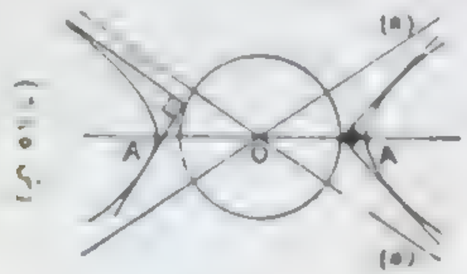
واز آنجا

$$OP^2 = 2a^2 - c^2$$

وچون بجای c^2 مقدار a^2+b^2 را قرار دهیم (شمارهٔ ۸۷۹) حاصل میشود :

$$OP^2 = a^2 - b^2$$

می مکان هندسی نقطهٔ P دایره‌ایست که مرکزش نقطهٔ O مرکز هذلولی و شعاعش $R=\sqrt{a^2-b^2}$ میباشد (ش ۶۸۵) واین دایره درصورتی وجود دارد که a^2 از b^2 بزرگتر باشد. این دایره‌را (درصورتیکه وجود داشته باشد) دایرهٔ عمود مسمیند



ش ۶۸۵

اگرداشته باشیم $a^2=b^2$ یعنی اگر هذلولی متساوی‌القطرین باشد نقطهٔ O تنها نقطه‌ایست که از آن میتوان مماسهای عمود برهم برهذلولی رسم کرد و این مماسها مجانبهای هذلولی میباشند

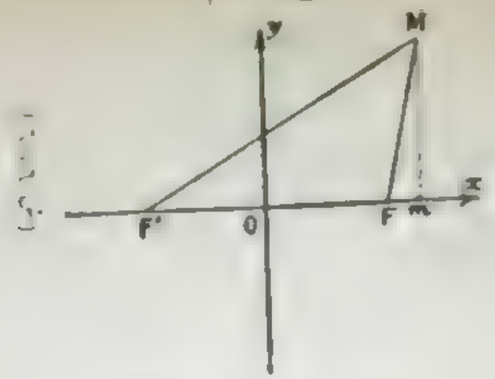
معادلهٔ هذلولی

۸۸۰ ـ محاسبهٔ شعاع حاملهای یك نقطهٔ متعلق به‌هذلولی برحسب طول آن نقطه ـ کانونهای هذلولی (H) را F و F' وطول محور کانونی آنرا 2a وطول قطعه‌خط FF' را 2c مینامیم وخط نامحدود FF' را محور طولها (x'x) وجهت مثبت آنرا از F' بطرف F میگیریم و عمود منصف قطعه خط FF' را محور عرضها (y'y) اختیار میکنیم (ش ۶۸۶) حال نقطهٔ دلخواهی مانند M بمختصات x و y درصفحهٔ xOy در نظر میگیریم و طولهای MF و MF' را برحسب x و y و c حساب

---

* یعنی باید زوایای متقابل بر [illegible] هذلولی [illegible] مساوی باشد و شاخه‌های هذلولی در داخل [illegible]

میکنیم. همانطور که درمورد بیضی دیده‌ایم (شمارهٔ ۸۴۰) حاصل میشود :



ش ۶۸۶

$$MF^2 = (x-c)^2 + y^2 \qquad (1)$$

$$MF'^2 = (x+c)^2 + y^2 \qquad (2)$$

$$\overline{MF'}^2 - \overline{MF}^2 = 4cx \qquad (3)$$

تا اینجا فرض کرده‌ایم که M نقطهٔ دلخواهی از صفحهٔ xOy باشد حال فرض میکنیم نقطهٔ M روی هذلولی (H) واقع باشد. اگر نقطهٔ M روی شاخهٔ [F] باشد داریم :

$MF'-MF=2a$ ونظر برابطهٔ (۳) حاصل میشود $MF'+MF=\frac{2cx}{a}$

و ازآنجا $\boxed{MF=\frac{cx}{a}-a}$ و $\boxed{MF'=\frac{cx}{a}+a}$ (۴)

و اگر نقطهٔ M روی شاخهٔ [F'] واقع باشد داریم

$MF-MF'=2a$ ونظر برابطهٔ (۳) حاصل میشود $MF'+MF=-\frac{2cx}{a}$

وازآنجا $\boxed{MF=-\frac{cx}{a}-a}$ و $\boxed{MF'=-\frac{cx}{a}+a}$ (۵)

۸۸۱ ـ معادلهٔ هذلولی ـ اگر نقطهٔ M بمختصات x و y روی هذلولی (H) واقع باشد برحسب آنکه روی شاخهٔ [F] و یا روی شاخهٔ [F'] باشد شعاع حاملهای آن در روابط (۱) و (۲) و (۳) و (۴) ویا (۱) و (۲) و (۳) و (۵) شمارهٔ قبل صادق هستند وچون مقدار MF را ازروابط (۴) یا (۵) در رابطهٔ (۱) قرار دهیم حاصل میشود

$$\left(a-\frac{cx}{a}\right)^2+y^2=(x-c)^2+y^2$$

و یا پس از انجام دادن عملیات لازم:

$$\left(\frac{a^2-c^2}{a^2}\right)x^2+y^2=a^2-c^2$$

ما میدانیم که $c^2-a^2=b^2$ پس رابطهٔ فوق باینصورت درمیآید:

$$-\frac{b^2x^2}{a^2}+y^2=-b^2$$

و چون طرفین را بر $-b^2$ تقسیم کنیم حاصل میشود

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1} \qquad (٦)$$

بنابراین هر نقطه که روی هذلولی (H) واقع باشد مختصات آن در رابطهٔ (٦) صادق هستند.

باروشی نظیر آنچه درمورد بیضی دیدیم (شمارهٔ ٨٤١) بآسانی میتوان تحقیق کرد که برعکس اگر مختصات نقطه‌ای در رابطهٔ (٦) صدق کند آن نقطه روی هذلولی (H) واقع است و درنتیجه

معادلهٔ هذلولیی که طول محور کانونیش $2a$ و فاصلهٔ کانونیش $2c$ باشد فرض $c^2-a^2=b^2$ از عبارتست از:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$$

تذکره - معادلهٔ هذلولی متساوی‌القطرین $(a=b)$ عبارتست از $x^2-y^2-a^2=0$

تمرین - در صفحه گردان شکل ٦٨٠ (صفحهٔ ٥٢) تحقیق کنید که معادلات خطوط مجانب (a') و (a) بترتیب عبارتند از

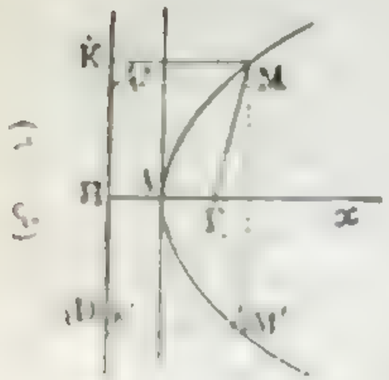
$$y=-\frac{b}{a}x \quad \text{و} \quad y=\frac{b}{a}x$$

---

[1] اگر مقدار MF' را از روابط (٤) و (٥) در رابطهٔ (٢) قرار دهید همین نتیجه بدست خواهد آمد

٣- سهمی

٨٨٢ - تعریف - در هر صفحه مکان هندسی نقاطی که از یک نقطه و از یک خط راست معلوم واقع در همان صفحه یک فاصله میباشند یک منحنی است که آنرا سهمی مینامند.



نقطهٔ معلوم را **کانون سهمی** و خط معلوم را **خط هادی** سهمی میگویند. اگر کانون سهمی را F و خط هادی آنرا D بنامیم، از نقطهٔ دلخواه M عمود MK را برخط D فرود آورده (ش ٦٨٧) سپس ملاحظه و کافی برای آنکه نقطهٔ M روی سهمی باشد اینست که داشته باشیم

$$\boxed{MF=MK} \qquad (١)$$

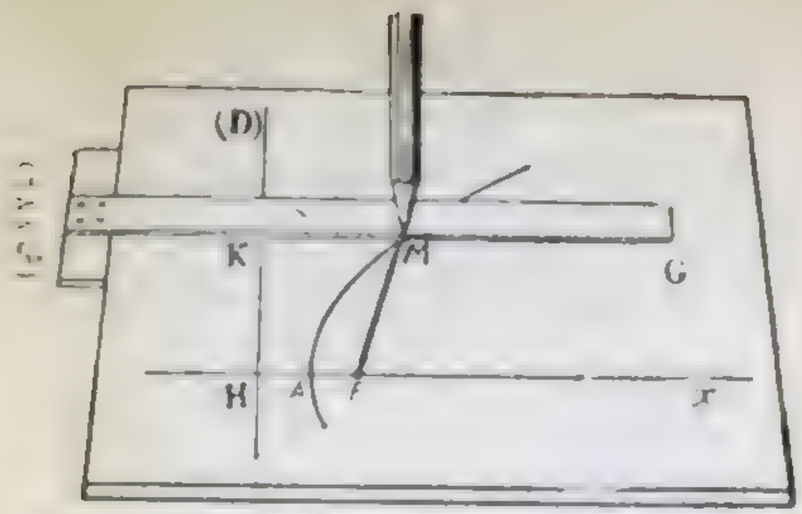
قطعه‌خط MF را **شعاع حامل** نقطهٔ M و فاصله کانون F را از خط هادی D **پارامتر** سهمی مینامند و آنرا بحرف p نمایش میدهند.

٨٨٣ - محور و رأس سهمی - کانون سهمی را F و مسقط آن بر خط هادی D مینامیم. اگر نقطهٔ M روی سهمی واقع باشد (ش ٦٨٧) نقطهٔ M' قرینهٔ M نسبت بخط Fx که از نقطهٔ F برخط D عمود شود نیز روی سهمی واقع است زیرا نقطهٔ M' نیز از کانون F و خط هادی D یکسان است.

خطی که از کانون سهمی بر خط هادی آن عمود شود محور تقارن سهمی است. مقدار پارامتر p از محور سهمی مشخص میشود.

تنها نقطه‌ای از سهمی که روی محور آن واقع است عبارتست از نقطهٔ A وسط قطعه‌خط FH (H مسقط مشترک محور سهمی و خط هادی است).

نقطهٔ A را **رأس سهمی** میگویند



خط D را بموازات یکی از اضلاع تخته مثلا ضلع سمت چپ رسم میکنیم و نقطهٔ F را در سمت راست آن میگیریم و یك T را مطابق شکل بر تخته قرار میدهیم و یك سر نخی را که طولش مساوی باطول KG باشد در نقطهٔ F بوسیلهٔ یك سنجاق ثابت نگاه میداریم و سر دیگرش را در نقطهٔ G به T متصل میکنیم و بوسیلهٔ نوك مدادی نخ را میکشیم تا قسمت MG از آن بر خط کش منطبق شود و قسمت MF [illegible] بطوریکه همواره بر نخ متکی باشد نوك مداد یك سهمی رسم میکند زیرا همواره MG = MK = MF = طول نخ

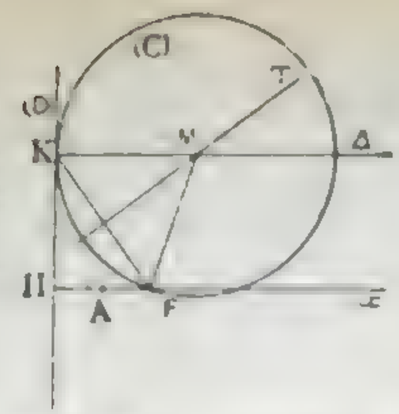
۸۸۴ ـ قضیه ـ هر سهمی مکان هندسی مراکز دایره‌هایست که از کانون آن بگذرند و با خط هادی آن مماس باشند.

کانون سهمی را F و خط هادی آنرا (D) مینامیم

اولا اگر نقطهٔ M روی این سهمی باشد دایرهٔ (C) که بمرکز M و بشعاع MF رسم شود (ش ۶۸۹) در نقطهٔ K یعنی پای عمود وارد از M بر خط هادی با این خط هادی مماس میشود

ثانیا هر دایره مانند (C) که از F بگذرد و با خط هادی (D) مماس شود مرکزش از نقطهٔ F و از خط D بیك فاصله خواهد بود و قضیه ثابت است.

تبصره ـ اگر یك خط راست مانند D و نقطه‌ای مانند F که روی D واقع نباشد در نظر بگیریم نظر باستدلال فوق مکان هندسی مراکز دایره‌هایی که با خط راست معلوم D مماس باشند

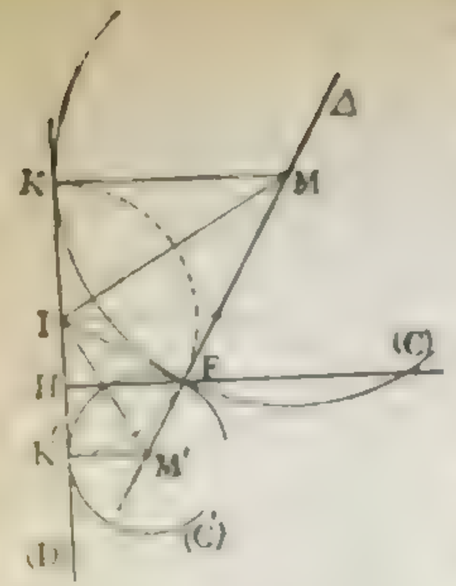


[illegible] نقطهٔ F کانون و خط D خط هادی این سهمی میباشد

۸۸۵ ـ ترسیم سهمی بوسیلهٔ نقطه‌یابی ـ یك نقطه مانند K روی خط دلخواه و از آن نقطه خط L را بموازات محور سهمی رسم میکنیم (ش ۶۸۹) میتوان نقطهٔ K را نقطهٔ تماس خط D با دایره‌ای مانند (C) دانست که از کانون F بگذرد و با خط هادی D مماس شود. مرکز دایرهٔ (C) روی سهمی واقع است. این مرکز عبارتست از نقطهٔ M تقاطع مشترك عمود منصف قطعه‌خط FK با خط Δ. اگر نقطهٔ K را روی خط هادی D تغییر مکان دهیم میتوان نقاط مختلف سهمی را بدست آورد. از اینرو نتیجه میشود که هر خط که بموازات محور سهمی رسم شود سهمی را بنقطه در [illegible] مشخص میکند

۸۸۶ ـ فصل مشترك سهمی با یك خط راست ـ میخواهیم فصل مشترك خط راست Δ را با سهمی که کانونش F و خط هادیش D باشد بدست آوریم. برحسب آنکه خط Δ از کانون سهمی بگذرد و یا نگذرد دو حالت تمیز میدهیم

حالت اول ـ خط Δ از کانون سهمی میگذرد ـ فصل مشترکهای خط Δ با سهمی نقاطی از خط Δ هستند که بتوان هر یك از آنها را مرکز دایره‌ای اختیار کرد که از کانون F بگذرد و [illegible] D مماس باشد. چنین دایره‌ای در نقطهٔ I [illegible] L [illegible] مماس خواهد بود. پس [illegible] I عمودی بر خط L [illegible] فصل مشترك



(ش ٦٩٠)

آنرا خط هادی (D) نقطه I ... (ش ٦٩٠) نقاط تماس خط D با دایره‌های مذکور نقاطی مانند K و K' از خط D هستند که از نقطهٔ I فاصله‌ای مساوی با IF واقع باشند و نقاط تقاطع سهمی با خط Δ عبارتند از نقاط M و M' فصل‌مشترکهای L با عمودهایی که از نقاط K و K' بر D اخراج شوند

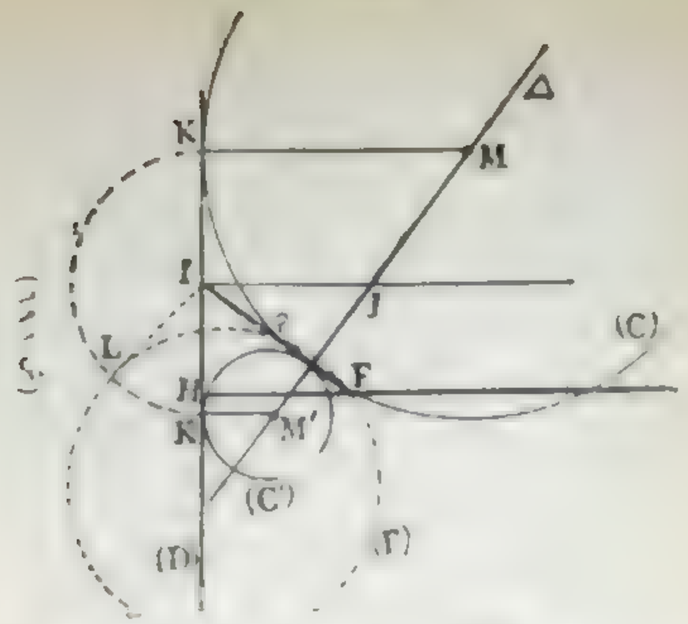
تبصره ـ خطوط IM و IM' ترتیب زوایای KIF و K'IF را نصف میکنند و بنابراین زاویهٔ MIM' قائمه است ـ چون I وسط قطعه خط KK' است اگر از آن خطی موازات محور سهمی رسم کنیم این خط از وسط قطعه خط MM' میگذرد

حالت دوم ـ خط L از کانون سهمی نمیگذرد ... (ش ٦٩١) ... خط L ... نقطه I ... خط هادی D مماس هستند ... شمارهٔ ٤٧٠ (منتم مقالات سوم و چهارم) حل کرده‌ایم و در اینجا راه حل آنرا ذکر میکنیم* :

... نقطه I ... مشترک خط Fφ با خط D مماس IL را بر دایرهٔ Γ رسم میکنیم و ابتدا

---

* ... معهول را K نامیم داریم $IK^2 = I\varphi \times IF$ یعنی IK واسطهٔ هندسی است مابین Iφ و IF پس اگر دایره‌ای از نقاط φ و F بگذرانیم و از I مماس IL را بر آن رسم کنیم طول IL مساوی IK خواهد بود

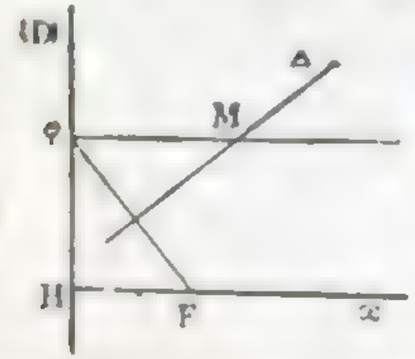


(ش ٦٩١)

از I قطعه‌خطهای IK و IK' را مساوی با IL بر خط (D) جدا میکنیم. نقاط K و K' نقاط تماس دایره‌های مذکور با خط هادی هستند و مراکز این دایره‌ها از طرفی روی خط Δ و از طرف دیگر روی خطوطی که از K و K' بر خط (D) عمود شوند واقعند پس اگر فصل مشترک این عمودها را با L مساوی M و M' بنامیم این نقاط فصل‌مشترکهای سهمی با خط L هستند

تبصره ـ اگر نقاط I و φ در یک طرف خط هادی (D) واقع باشند خط L (بشرط آنکه با محور سهمی موازی نباشد) سهمی را در دو نقطه قطع میکند اگر نقاط I و φ در دو طرف خط D واقع باشند خط L با سهمی نقطهٔ مشترکی ندارد

اگر نقطهٔ φ روی خط هادی واقع شود (ش ٦٩٢) فقط یک دایره ... I و φ بگذرد و با خط D مماس شود. مرکز این دایره عبارتست از فصل‌مشترک Δ با خطی که در φ بر خط D عمود شود در این حالت خط L ... نقطهٔ مشترک با بیضی دارد و در شمارهٔ ٨٨٧ ثابت خواهیم کرد که در اینصورت L با سهمی مماس است



(ش ٦٩٢)

* این حالت را قبلا در شمارهٔ ٨٨٥ دیده‌اید

تبصره ـ اگر خط L در نقطه‌ی مانند K بر خط هادی سهمی عمود باشد همانطور که درشمارهٔ ۸۸۵ دیدیم تنها نقطه‌ای که خط مزبور سهمی را قطع میکند روی عمودمنصف قطعه‌خط KF واقع است (ش ۶۸۹)

از آنچه گذشت نتیجهٔ زیر بدست میآید :

هرخط که بامحور یك سهمی موازی باشد آن سهمی را در یك نقطه قطع میکند

هرگاه نقطه‌ی مانند L با محور سهمی موازی باشد

ولا اگر نقطهٔ φ یعنی مرکز کانون از خط L در طرف خط هادی واقع باشد خط L سهمی را در دو نقطه قطع میکند

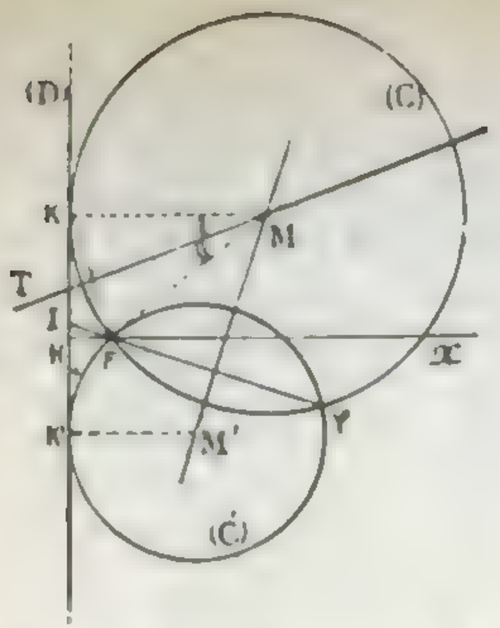
ثانیاً اگر نقاط φ و F در دو طرف خط هادی واقع باشند خط Δ سهمی را قطع میکند

ثالثاً اگر نقطهٔ φ روی خط هادی واقع‌شود خط L فقط در یك نقطه سهمی مشترك است

۸۸۷ ـ خط مماس برسهمی دریکی از نقاط آن ـ همانطور که درمورد بیضی و هذلولی گفتیم (شمارهٔ ۸۲۶و۸۶۲) برای تحقیق آنکه در یك نقطه مانند M از سهمی خط مماس برسهمی وجود دارد یا نه باید دونقطهٔ مجاور M و M' را روی سهمی درنظر بگیریم و تحقیق کنیم که اگر نقطهٔ M' رفته رفته بنقطهٔ M نزدیك و بالاخره بر آن منطبق شود خط قاطع MM' بسمت وضع حدی میل میکند یا نه

فرض میکنیم F کانون و (D) خط‌هادی یك‌سهمی باشد و دو نقطهٔ مجاور M و M' را روی این سهمی درنظر میگیریم (ش ۶۹۳)

میدانیم که دایره‌های (C) و (C') که از نقطهٔ F میگذرند ومراکز آنها M و M' میباشند باخط (D) در نقاطی مانند K و K' مماس‌هستند. این دو دایره یکدیگر را درنقطهٔ دیگری مانند φ که قرینه کانون F نسبت بخط MM' است قطع میکنند. محور اصلی این دو دایره یعنی خط $F\varphi$ خط هادی (D) را در نقطه‌ای مانند I قطع میکند این نقطه که نسبت بدو دایرهٔ (C) و (C') دارای یك‌قوت‌مشترك‌است وسط‌قطعه‌خط KK' میباشد



(ش ۶۹۳)

هرگاه نقطه M' بسمت نقطهٔ M روی‌سهمی حرکت کند و رفته رفته نزدیك و بالاخره بر آن منطبق شود نقطهٔ K' رفته رفته بنقطهٔ K نزدیك و بالاخره بر آن منطبق‌میگردد و نقطهٔ I نیز بر K منطبق میشود و خط MM' که همواره برخط FI عمود است بسمت خط T که از M بر FK عمودشود میل میکند (خط T عمودمنصف‌قطعه‌خط FK است) پس‌خط T درنقطهٔ M برسهمی مماس‌است.

این نکته شایستهٔ دقت است که مماس MT عبارتست‌از نیمساز زاویهٔ KMF یعنی بیساز زاویهٔ شعاع حامل MF باخط MK که از M برخط هادی سهمی عمود شود.

از آنچه گذشت نتیجه میشود که

قضیه ـ درهرنقطه مانند M از سهمی یك خط مماس بر سهمی وجود دارد واین‌خط‌مماس عبارتست‌ازخط نیمساز زاویهٔ شعاع‌حامل نقطهٔ M وخطی که از M برخط هادی سهمی عمودشود.

اگر نقطهٔ M برراس سهمی منطبق‌باشد مماس در آن نقطه برسهمی برمحور سهمی عمود است

۸۸۸ ـ تبصره ـ طریقهٔ ترسیم‌سهمی بوسیلهٔ نقطه‌یابی که درشمارهٔ ۸۸۵ شرح دادیم دارای این خاصیت جالب توجه است که عمودمنصف قطعه خط FK که از تقاطع آن باعمودی که از K برخط هادی رسم‌شود نقطهٔ M از سهمی بدست میآید خودش خط مماس برسهمی در نقطهٔ M میباشد

خاصیت‌های خط مماس بر سهمی

۸۸۹ ـ در شکل ۶۹۳ دیده میشود که نقطهٔ K از خط هادی (D) عبارتست از قرینهٔ کانون F نسبت بخط مماس MT

برعکس قرینهٔ کانون F را نسبت بیك خط راست مانند T نقطهٔ K مینامیم. اگر نقطهٔ K روی خط هادی (D) واقع باشد خطی که از نقطهٔ K برخط هادی عمود شود خط T را در نقطه‌ای مانند M قطع میکند. نقطهٔ M روی سهمی است (شمارهٔ ۸۸۵) و خط T در نقطهٔ M بر سهمی مماس است (شمارهٔ ۸۸۷)

از مطالب فوق قضیهٔ زیر بدست میآید

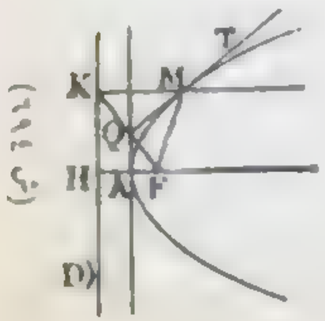
قضیهٔ ۱ ـ برای آنکه یك خط راست با یك سهمی مماس باشد لازم و کافیست که قرینهٔ کانون سهمی نسبت بآن خط روی خط هادی سهمی واقع باشد.

این قضیه را میتوان بصورت زیر نیز بیان کرد

مکان هندسی قرینه‌های کانون سهمی نسبت بخطوط مماس بر آن عبارتست از خط هادی سهمی.

۸۹۰ ـ **نتیجه** ـ عمودمنصف‌های قطعه‌خط‌هائیکه نقاط مختلف یك خط راست با یك نقطه ثابت واقع بر خارج آن خط وصل میکنند همگی بر یك سهمی مماسند. خط راست مزبور خط هادی و نقطه ثابت مذکور کانون آن سهمی میباشد

۸۹۱ ـ خط مماس بر سهمی در رأس آن ـ تصویر کانون F روی مماس MT عبارتست از نقطهٔ Q وسط قطعه خط FK (ش ۶۹۴) و اگر وسط قطعه‌خط FH یعنی رأس سهمی را A بنامیم و A را به Q وصل کنیم قطعه‌خط AQ که اوساط دوضلع از مثلث FHK را بهم وصل میکند باضلع سوم آن یعنی با خط هادی (D) موازیست. اما خط AQ در رأس A بر سهمی مماس است پس وقتی نقطهٔ M روی سهمی و



(ش ۶۹۴)

نقطهٔ K روی خط هادی حرکت کند نقطه Q روی خط مماس بر رأس سهمی حرکت میکند

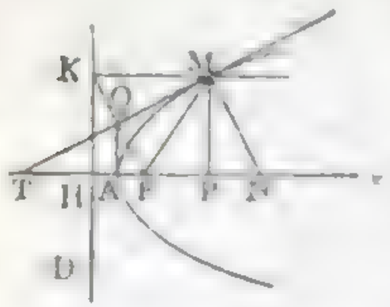
برعکس اگر نقطهٔ Q یکی از نقاط خط مماس بر رأس سهمی باشد و از نقطهٔ Q عمود QT را بر FQ رسم کنیم و قرینهٔ کانون F را نسبت بخط T نقطهٔ K بنامیم واضح است که نقطهٔ K روی خط هادی واقع میباشد پس خط QT بر سهمی مماس است.

از آنچه گذشت قضیهٔ زیر حاصل میشود

قضیهٔ ۲ ـ برای آنکه یك خط راست با یك سهمی موازی باشد لازم و کافیست که تصویر کانون سهمی بر آن خط متعلق بمماس بر رأس سهمی باشد.

۸۹۲ ـ **نتیجه** ـ اگر زاویهٔ قائمه‌ای در صفحهٔ خود چنان تغییر مکان دهد که راس همواره روی یك خط راست ثابت حرکت کند و یك ضلعش همواره از نقطهٔ ثابتی که روی خط راست مزبور واقع نباشد بگذرد محل ضلع دیگرش ☆ یك سهمی که نقطهٔ ثابت مزبور کانون آن و خط راست مزبور خط هادی آنست همواره مماس میباشد.

۸۹۳ ـ تحت مماس و تحت قائم سهمی ـ نقطهٔ M را روی یك سهمی در نظر میگیریم (ش ۶۹۵) و تصویر M را برمحور Fx سهمی نقطهٔ P مینامیم و از نقطهٔ M سهمی را رسم میکنیم تا اولی محور سهمی را در نقطه‌ای مانند T و دومی محور سهمی را در نقطه‌ای مانند N قطع کند. قطعه خطهای PT و PN را بترتیب **تحت مماس** و **تحت قائم** سهمی در نقطهٔ M مینامند



(ش ۶۹۵)

☆ منظور خط راستی است که صفحه دیگر روی سطح جانبی آن و بموازات آن حرکت کند

☆☆ قائم بر سهمی در یکی از نقاط آن مانند M خط عمودیست که بر M برمماس MT رسم شود

۸۹۴ - قضیه - اولا تحت قائم سهمی در هریك از نقاط آن مساوی با پارامتر سهمی است. ثانیاً رأس سهمی در وسط هریك از تحت مماسهای آن واقع است.

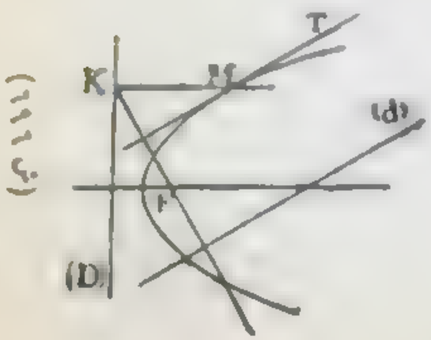
اولا تصویر نقطهٔ M را برخط هادی نقطهٔ K مینامیم (ش ۶۹۵). مماس در نقطهٔ M برسهمی عمودمنصف قطعه‌خط KF میباشد وقائم برسهمی در نقطهٔ M باخط FK موازیست. اگر فصل‌مشترك محور و خط هادی را نقطهٔH بنامیم دومثلث قائم‌الزاویهٔ KHF و MPN مساویند پس PN = HF اما PN تحت قائم درنقطهٔ M و HF پارامتر سهمی است (شمارهٔ ۸۸۲) و قسمت اول قضیه ثابت است.

ثانیا فصل‌مشترك‌مماس MT رابا KF نقطهٔ Q مینامیم (میدانیم که نقطهٔ Q وسط قطعه خط KF است). دومثلث KQM و FQT متساویند (در حالت دوزاویه‌وضلع بین آنها KQ = QF) و بنابراین نقطهٔ Q وسط قطعه‌خط MT است وچون نقطهٔ Q روی مماس بررأس سهمی واقع است (شمارهٔ۸۹۱) پس رأس سهمی یعنی نقطهٔ A وسط‌تحت مماس PT میباشد.

مسائل مربوط بخط مماس

۸۹۵ - مسئلهٔ ۱ - خط‌راست d درصفحهٔ یك‌سهمی مفروض است. میخواهیم خط‌مماسی بموازات خط d برسهمی‌رسم کنیم.

فرض‌میکنیم F کانون سهمی و (D) خط‌هادی آن باشد (ش ۶۹۶) قرینهٔ کانون F نسبت بخط مماس مطلوب از طرفی روی خط هادی (D) (شمارهٔ ۸۸۹) و از طرف دیگر روی عمود مرسوم از نقطهٔ F بر خط d است (زیرا مماس مطلوب باخط d موازیست) بنابراین اگر از نقطهٔ F خطی بر d عمود کنیم وفصل مشترك آنرا با خط هادی (D) نقطهٔ K بنامیم‌عمودمنصف‌قطعه‌خط FK یعنی خط T مماس مطلوبست. نقطهٔ‌تماس M عبارتست از فصل مشترك مماس T با خطی که از نقطهٔ K بر خط هادی عمود شود.



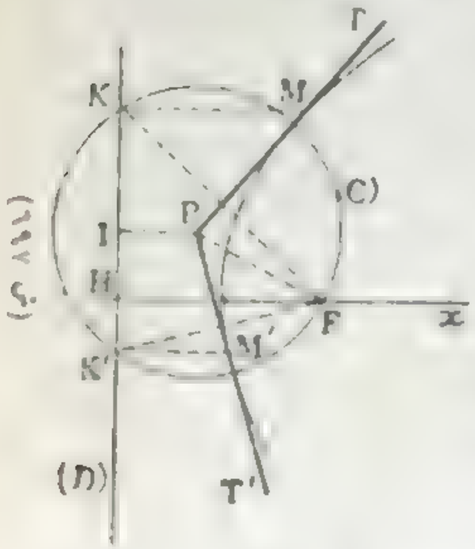
(ش ۶۹۶)

مسئله همواره یك جواب دارد مگر در صورتیکه خط d با محور سهمی موازی باشد

تمرین - شکل ۶۹۱ را که برای معین نقطه فصل‌مشترك خط d با سهمی بکار بردیم درنظر بگیرید و تحقیق کنید که اگر خط Δ بموازات محور در صفحهٔ تغییر مکان دهد نقطهٔ I ثابت میماند و خطی که از نقطهٔ I بموازات محور سهمی رسم شود از نقطهٔ J وسط وتر MM' میگذرد. و اگر خط مماسی بموازات خط d برسهمی رسم کنیم خط IJ ازنقطهٔ تماس آن میگذرد. خط راستی را که از I بموازات محور سهمی رسم میشود **قطر نظیر امتداد d** مینامند

۸۹۶ - مسئلهٔ ۲ - میخواهیم از نقطهٔ معلوم P واقع در صفحهٔ یك‌سهمی مماسی برآن سهمی رسم کنیم.

فرض‌میکنیم F کانون سهمی و (D) خط‌هادی آن باشد (ش۶۹۷) قرینهٔ کانون F نسبت بخط مماس مطلوب ازطرفی روی‌خط‌هادی (D) (شمارهٔ ۸۸۹) و از طرف‌دیگر روی دایرهٔ (C) که مرکزش P و شعاعش PF باشد واقع است زیرا دو نقطه که نسبت بخط مماس مطلوب قرینهٔ یکدیگر باشند از هر نقطهٔ واقع براین خط‌مماس و از جمله از نقطهٔ P بیك‌فاصله واقعند



(ش ۶۹۷)

اگردایرهٔ (C) خط‌هادی (D)را درنقاط K و K' قطع کند میتوان از نقطهٔ P دومماس برسهمی رسم کرد و در اینصورت میگویند **نقطهٔ P درخارج سهمی واقع است.** این دو مماس عبارتنداز عمود منصف‌های قطعه‌خط‌های FK و FK' و نقاط تماس آنها M و M' بترتیب روی‌خطوط راستی که از نقاط K و K' عمود برخط هادی رسم شود واقعند

اگر دایرهٔ (C) باخط هادی (D) مماس باشد نقطهٔ P روی سهمی واقع است (شمارهٔ ۸۸۴) و مسئله یك‌جواب دارد که همان مماسی‌است که میتوان در نقطهٔ P واقع برسهمی برآن رسم کرد.

اگردایرهٔ (C) باخط‌هادی (D) نقطهٔ مشترکی نداشته‌باشد نمیتوان از نقطهٔ P مماسی برسهمی رسم کرد و دراینصورت میگویند **نقطهٔ P در**

داخل سهمی واقع است.

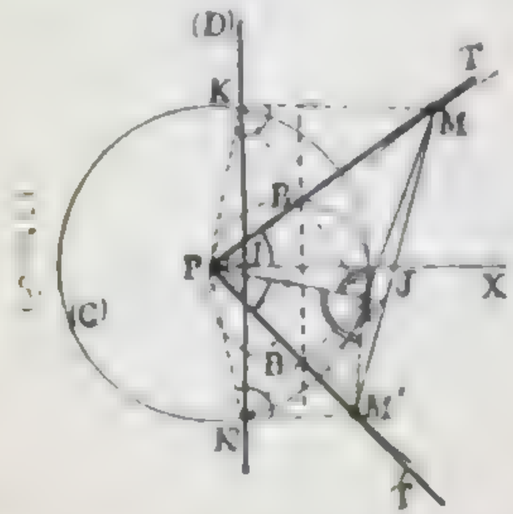
۸۹۷ - شرط آنکه نقطه‌ای مانند P در خارج یك سهمی واقع باشد - برای آنکه نقطهٔ P درخارج سهمی واقع باشد یعنی بتوان از P دو مماس بر سهمی رسم کرد لازم و کافیست که شعاع (C) خط هادی (D) را قطع کند (ش ۶۹۷) و مماس برای [illegible] دایرهٔ (C) جنس هادی (D) را قطع کند لازم و کافیست که فاصلهٔ نقطهٔ P از خط (D) کوچکتر از شعاع PF باشد یعنی لازم و کافیست که داشته باشیم $PI<PF$ پس:

برای آنکه نقطه‌ای در خارج سهمی واقع باشد لازم و کافیست که فاصلهٔ آن از خط هادی کوچکتر از فاصلهٔ آن از کانون سهمی باشد.

۸۹۸ - قضایای پونسله - اگر از نقطهٔ P واقع درخارج یك سهمی دوخط مماس بر آن رسم کنیم و نقاط تماس را M و M' و وسط قطعه‌خط MM' را نقطهٔ J و کانون سهمی را F بنامیم

اولا خط راست PF خط نیمساز زاویهٔ MFM' است و خطی که از نقطهٔ P بموازات محور سهمی رسم شود از نقطهٔ J میگذرد. ثانیاً خطوط مماس* نسبت بخط نیمساز زاویهٔ FPJ قرینهٔ یکدیگرند.

اولا شکلی را که در شمارهٔ ۸۹۶ برای ترسیم مماسهای PM و PM' بکار بردیم در نظر میگیریم (ش ۶۹۸) وخط PX را از نقطهٔ P عمود برخط



* مقصود خطوط راست [illegible] PM و PM' است

هادی رسم میکنیم و واضح است که

	$PFM = PKM$	(زاویهٔ [illegible] PM)
و	$\widehat{PFM'} = \widehat{PK'M'}$	(تقارن نسبت بخط PM')
اما	$\widehat{PKM} = \widehat{PK'M'}$	(تقارن نسبت بخط PX)

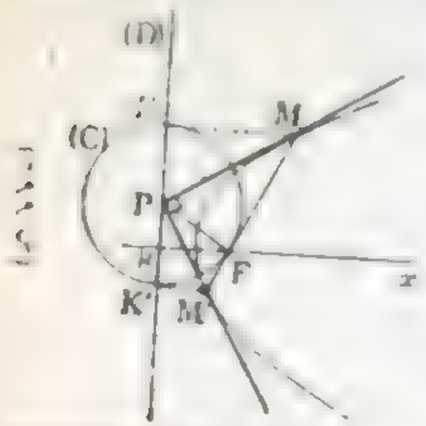
پس $PFM = PFM'$ یعنی خط FP زاویهٔ MFM' را تنصیف میکند.

ازطرف دیگر خط PX از وسط قطعه‌خط KK' که آنرا I بنامیم میگذرد* و در ذوزنقهٔ KK'M'M خط PX که از نقطهٔ I وسط ساق KK' موازات دوقاعدهٔ KM و K'M' رسم شده‌است ازنقطهٔ J وسط ساق MM' میگذرد

ثانیاً تصاویر F روی دومماس که آنها را B و B' بنامیم روی دایرهٔ قطر PF واقع هستند (ش ۶۹۸) وخط BB' که در رأس سهمی بر آن مماس است (شمارهٔ ۸۹۱) بر PX عمود میباشد

بنابراین درمثلث PBB' ارتفاع نظیرضلع BB' برخط PJ منطبق است و قطر دایرهٔ محیطی این مثلث PF میباشد ومیدانیم (به‌تمرین ذیل شمارهٔ ۸۳۸ رجوع کنید) که نیمساز زاویهٔ BPB' برنیمساز زاویهٔ FPJ منطبق است پس خطوط مماس PT و PT' نسبت به‌نیمساز زاویهٔ FPJ قرینهٔ یکدیگرند.

۸۹۹ - عکس هندسی نقاطی که میتوان از آنها دو مماس عمود برهم بر یك سهمی رسم کرد - چون مماسهای PM و PM' بترتیب بر خطوط FK و FK' عمودند (ش ۶۹۹) برای آنکه دو مماس مربوط برهم عمود باشند لازم و کافیست که FK و FK' برهم عمود باشند و برای این لازم و کافیست که KK' مصری [illegible] (C) باشد یعنی نقطهٔ P روی خط هادی (D) واقع باشد. از آنچه گفتیم قضیهٔ زیر حاصل میشود



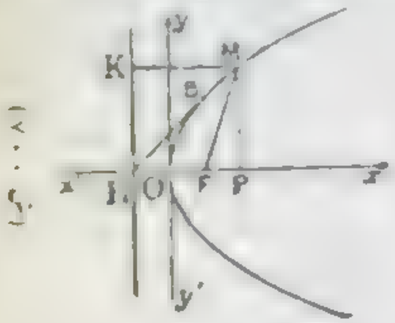
* نقطهٔ P [illegible] (C) و KK' وتری از این [illegible] است و PX را عمود بر KK' رسم کرده‌ایم

قضیه ـ خط هادی سهمی مکان هندسی نقاطی است که از آنها میتوان دو مماس عمود برهم بر سهمی رسم کرد.

۹۰۰ ـ تبصره ـ اگر نقطهٔ P روی خط هادی سهمی باشد (ش ۶۹۹) زوایای PFM و PFM' که بترتیب با زوایای PKM و PK'M' مساوی هستند قائمه میباشند و بنابراین:

اگر از نقطهٔ P واقع بر خط هادی یک سهمی دو مماس PM و PM' را بر آن سهمی رسم کنیم خط راست MM' از کانون F میگذرد و بر PF عمود است.

۹۰۱ ـ معادلهٔ سهمی ـ فرض میکنیم نقطهٔ F کانون و خط (D) خط هادی سهمی باشد و تصویر کانون را روی خط هادی نقطهٔ H مینامیم و فاصلهٔ FH یعنی پارامتر سهمی را P میخوانیم و نقطهٔ O رأس سهمی را مبدأ مختصات و محور سهمی را محور طولها (x'x) و جهت مثبت آنرا از O بطرف کانون F اختیار میکنیم و مماس در رأس سهمی را محور عرضها (y'y) میگیریم (ش ۷۰۰)



(ش ۷۰۰)

برای آنکه نقطه‌ای مانند M روی سهمی باشد لازم و کافیست که فاصله‌اش از کانون F مساوی با فاصلهٔ آن از خط هادی باشد و اگر تصویر M را روی خط هادی نقطهٔ K نامیم لازم و کافیست که داشته باشیم

$$MK = MF \qquad (1)$$

اگر x و y مختصات نقطهٔ M و P تصویر M روی محور x'x باشد داریم

$$\overline{OH} = -\frac{P}{2} \quad \text{و} \quad OF = \frac{P}{2} \quad \text{و} \quad y = PM \quad \text{و} \quad x = \overline{OP}$$

پس

$$\overline{KM}^2 = \left(x + \frac{P}{2}\right)^2 \quad \text{و} \quad MF^2 = \left(x - \frac{P}{2}\right)^2 + y^2$$

شرط لازم و کافی برای آنکه نقطهٔ M روی سهمی باشد اینست که تساوی زیر برقرار باشد:

$$y^2 + \left(x - \frac{P}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{P}{2}\right)^2$$

که پس از خلاصه کردن بصورت زیر که معادلهٔ سهمی است درمیآید

$$\boxed{y^2 = 2px} \qquad (2)$$

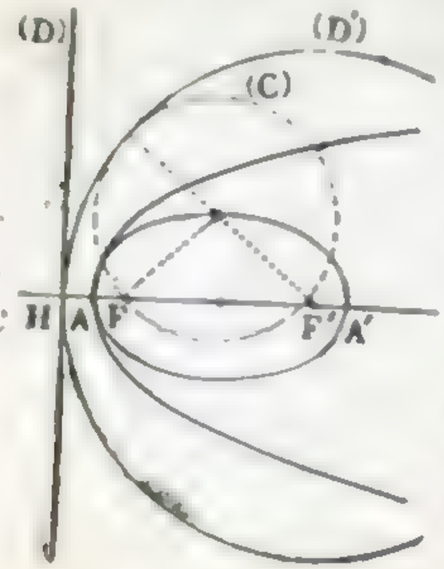
تمرین ـ تحقیق کنید که سهمی از نقطهٔ B بمختصات $\left(p \text{ و } \frac{P}{2}\right)$ میگذرد و مماس در نقطهٔ B بر سهمی خط HB میباشد.

سهمی را میتوان حد یک بیضی یا یک هذلولی دانست.

۹۰۲ ـ بیشتر قضایایی را که در مورد سهمی ذکر کردیم شباهت زیادی با قضایای مربوط به بیضی و هذلولی دارند. خط هادی سهمی بمنزلهٔ دایرهٔ هادی بیضی و هذلولی است و مماس در رأس سهمی بمنزلهٔ دایرهٔ اصلی بیضی و هذلولی میباشد. [illegible] یکی از کانونهای بیضی و هذلولی نقطهٔ بینهایت دور روی محور سهمی است. قضیهٔ زیر علت این تشابه را روشن میکند و وسیله‌ای بدست میدهد که بسیاری از خواص مربوط به سهمی را از خاصیت‌های مربوط به بیضی و هذلولی استنباط کنیم:

قضیه ـ سهمی حد یک بیضی (یا یک هذلولی) است که یکی از کانونها و رأس مجاور بآن کانونش ثابت بمانند و کانون دیگرش روی محور کانونی بینهایت دور شود.

فرض میکنیم F و F' کانونهای یک بیضی و A و A' رأسهای واقع روی محور اطول آن باشند و دایرهٔ هادی (D') نظیر کانون F' را رسم میکنیم (ش ۷۰۱) یکی از نقاط تقاطع دایرهٔ (D') با محور کانونی نقطهٔ H میباشد که قرینهٔ کانون F نسبت برأس A است



(ش ۷۰۱)

میدانیم که بیضی مکان هندسی مراکز دایره‌هایی مانند (C) است که از کانون F میگذرند و با دایرهٔ هادی (D') مماسند.

اگر کانون F و رأس مجاور آن A ثابت بمانند و کانون F' روی محور کانونی درجهت از A بطرف F بینهایت دور شود نقطهٔ H ثابت

میماند ودایرهٔ هادی (D') که نقطهٔ H از آن ثابت است سمت خط راست (D) که از نقطهٔ H برمحور x'x عمود شود عمل میکند. در اینصورت بیضی عمل میکند بست مکان هندسی مراکز دایره‌هایی که از نقطهٔ F بگذرند و با خط ثابت (D) مماس باشند ومیدانیم این مکان یك سهمی است که کانونش F و خط هادیش (D) میباشد.

استدلال درمورد هذلولی نیز همین طور است.

[بعداً ثابت خواهیم کرد که محل مشترکهای یك سطح مخروطی دوار با یك صفحهٔ قاطع یك بیضی یا یك هذلولی و یا یك سهمی است و بهمین مناسبت این سه منحنی را مقطع‌های مخروطی مینامند]

٤ ـ خاصیت‌های مشترك مقطع‌های مخروطی

خطوط هادی بیضی و هذلولی

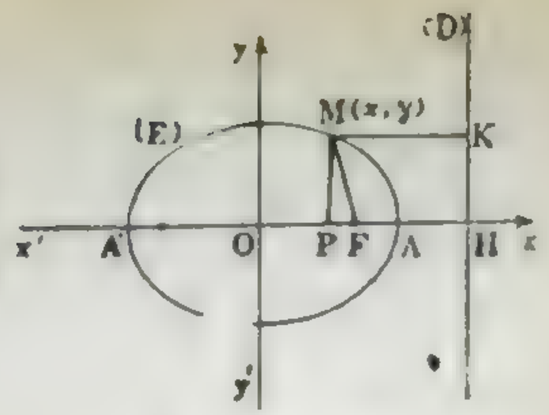
بیشتر خاصیت‌های این سه منحنی شباهت زیادی با یکدیگر دارند و روشی که برای حل کردن مسائل مربوط بآنها بکاربردیم یکسانست واگر مبتدیان حل هریك ازاین مسائل را پی‌درپی برای سه منحنی تکرار کنند زودتر و آسانتر میتوانند آنها را بخاطر بسپارند. از قضیهٔ زیر معلوم میشود که میتوان یك تعریف مشترك برای مقطع‌های مخروطی بیان کرد:

۹۰۳ ـ قضیه ـ دریك صفحه نقطه‌ای مانند F و خط راستی مانند D را درنظر میگیریم و فرض میکنیم نقطهٔ F روی خط D واقع نباشد

مکان هندسی نقاطی ازاین صفحه که نسبت فاصلهٔ آنها از نقطهٔ معلوم F بفاصله‌شان ازخط معلوم D مساوی باعدد مثبت e میباشد بازای $e<1$ یك بیضی و بازای $e=1$ یك سهمی و بازای $e>1$ یك هذلولی است.

حالت اول: $e<1$

از نقطهٔ F خط x'x را عمود برخط D رسم میکنیم وپای این عمود را H مینامیم (ش ۷۰۲) وروی محور x'x جهت از F بطرف H را جهت



مثبت میگیریم. میدانیم که روی خط x'x دو نقطه مانند A و A' میتوان یافت بقسمیکه داشته باشیم

$$\frac{A'F}{A'H}=e \quad \text{و} \quad \frac{AF}{AH}=e$$

این دو نقطه متعلق بمکان مذکور هستند

یکی ازاین دو نقطه مثلا A مابین F و H ودیگری یعنی A' درخارج قطعه‌خط FH واقع است وچون e کوچکتر از یك است داریم $A'F<A'H$ یعنی نقاط A' و F دریك طرف نقطهٔ H واقع هستند. بنابراین نقطهٔ F مابین نقاط A و A' قرار دارد

وسط قطعه‌خط AA' را نقطهٔ O مینامیم و فاصلهٔ $OA=OA'$ را a و فاصلهٔ OF را c میخوانیم. چون تقسیم AA'FH توافقی است (زیرا $\frac{A'F}{A'H}=-\frac{AF}{AH}=e$) پس نظر بشمارهٔ ٤٤٦ (منتم مقالات سوم و چهارم) داریم:

$$OF\times OH=\overline{OA'}^2 \quad \text{و از آنجا} \quad OH=\frac{\overline{OA'}^2}{OF}=\frac{a^2}{c} \qquad (1)$$

از طرف دیگر

$$e=\frac{AF}{AH}=\frac{A'F}{A'H}=\frac{AF+A'F}{AH+A'H}=\frac{2a}{2OH}=\frac{a}{\frac{a^2}{c}}=\frac{c}{a} \qquad (2)$$

اگر محور x'x را محور طولها و عمودمنصف قطعه خط A'A را

محور عرضها $(y'y)$ بگیریم و فرض کنیم نقطهٔ M بمختصات $(x$ و $y)$ یکی از نقاط مکان باشد و تصاویر نقطهٔ M را روی خط D نقطهٔ K و روی خط $x'x$ نقطهٔ P بنامیم داریم :

$$\overline{FP}=\overline{OP}-\overline{OF}=x-c \qquad (۳)$$

و

$$\overline{MK}=\overline{PH}=\overline{OH}-\overline{OP}=\frac{a^2}{c}-x \qquad (٤)$$

وچون نقطهٔ M را متعلق بمکان مزبور فرض کرده‌ایم :

$$\frac{MF}{MK}=e \quad \text{و یا} \quad MF^2=e^2\times MK^2 \qquad (٥)$$

اما در مثلث قائم‌الزاویهٔ MPF داریم

$$\overline{MF}^2=\overline{FP}^2+\overline{PM}^2 \qquad (٦)$$

پس رابطهٔ (٥) باینصورت درمیآید :

$$\overline{FP}^2+PM^2=e^2\times\overline{MK}^2$$

وبا درنظر گرفتن روابط (٢) و (٣) و (٤) و ملاحظهٔ اینکه $y=PM$ نتیجه میشود :

$$(x-c)^2+y^2=\frac{c^2}{a^2}\left(\frac{a^2}{c}-x\right)^2$$

و یا

$$x^2-2cx+c^2+y^2=\frac{c^2}{a^2}\left(\frac{a^4}{c^2}-2\frac{a^2}{c}x+x^2\right)$$

و یا

$$x^2-2cx+c^2+y^2=a^2-2cx+\frac{c^2}{a^2}x^2$$

و یا

$$x^2\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)+y^2=a^2-c^2$$

وچون a^2-c^2 را b^2 فرض کنیم☆ حاصل میشود :

$$\frac{x^2b^2}{a^2}+y^2=b^2$$

و بالاخره

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

☆ چون $c=\frac{a}{2}$ کوچکتر از یک است پس $a>c$ و $a^2-c^2>0$

یعنی نقطهٔ M که معین بمکان مذکور است روی بیضی (E) که طول محور اطول آن $2a$ و فاصلهٔ کانونی آن $2c$ است واقع میباشد (نقطهٔ F یکی از کانونهای این بیضی است) .

برعکس اگر نقطهٔ M بمختصات x و y روی بیضی (E) واقع باشد و تصاویر آنرا روی خط D نقطهٔ K و روی خط $x'x$ نقطهٔ P بنامیم

داریم

$$MF=a-\frac{cx}{a}=\frac{a^2-cx}{a} \qquad \text{(شمارهٔ ۸٤۰)}$$

و همچنین

$$\overline{MK}=\overline{PH}=\overline{OH}-\overline{OP}=\frac{a^2}{c}-x=\frac{a^2-cx}{c}$$

و از مقایسهٔ این دو رابطه نتیجه میشود $\frac{MF}{MK}=\frac{c}{a}=e$ یعنی هر نقطه که روی بیضی (E) واقع باشد متعلق بمکان مزبور میباشد و نسبت در این حالت ثابت است

تعریف ـ خط D را خط هادی نظیر کانون F متعلق به بیضی (E) مینامند . و عدد e را که مساوی با نسبت $\frac{c}{a}$ و کوچکتر از یک است **خروج از مرکز** بیضی میگویند

چون محور $y'y$ محور تقارن بیضی است واضح است که خط D' قرینهٔ خط D نسبت به $y'y$ نیز خط هادی نظیر کانون F' از بیضی میباشد

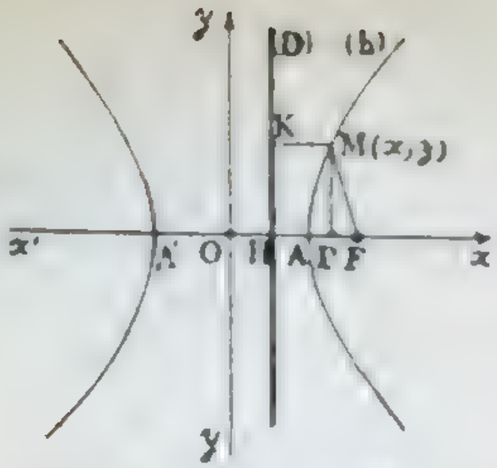
حالت دوم : $e=1$

در این حالت اگر M یکی از نقاط مکان و K تصویر آن روی خط D باشد داریم $MF=MK$ و میدانیم که مکان مذکور یک سهمی است که کانونش F و خط هادیش D میباشد (شمارهٔ ۸۸۲)

حالت سوم☆ : $e>1$

از نقطهٔ F خط $x'x$ را عمود بر خط D رسم میکنیم و پای این عمود را H مینامیم (ش ۷۰۳) و روی محور $x'x$ جهت از H بطرف F را جهت مثبت میگیریم . میدانیم که روی خط $x'x$ دو نقطه مانند A و A' میتوان یافت بقسمیکه داشته باشیم

☆ توجه کنید که در این حالت قراردادها و استدلال بعد در دو مورد مثل حالت اول است



(شکل ۸۰)

$$\frac{A'F}{A'H}=e \quad \text{و} \quad \frac{AF}{AH}=e$$

این دو نقطه متعلق بمکان مذکورهستند.

یکی از این دو نقطهٔ مثلا A مابین F و H ودیگری یعنی A' درخارج قطعه‌خط FH واقع است وچون e بزرگتر از یك است. داریم $A'F>A'H$ یعنی نقاط A' و H در یك طرف نقطهٔ F واقع هستند و بنابراین نقطهٔ H مابین نقاط A و A' قرار دارد

وسط قطعه‌خط AA' را نقطهٔ O مینامیم و فاصلهٔ $OA=OA'$ را a و فاصلهٔ OF را c میخوانیم. چون قسم AA'FH توافقی داریم

$$OF\times OH=\overline{OA'}^2 \quad \text{و از آنجا} \quad OH=\frac{\overline{OA'}^2}{\overline{OF}}=\frac{a^2}{c}$$

واز طرف دیگر

$$e=\frac{AF}{AH}=\frac{A'F}{A'H}=\frac{A'F-AF}{A'H-AH}=\frac{2a}{2OH}=\frac{a}{a^2/c}=\frac{c}{a}$$

اگر محور x'x را محور طولها و عمود منصف قطعه خط A'A را محور عرضها (y'y) بگیریم وفرض کنیم نقطهٔ M بمختصات (x و y) یکی از نقاط مکان باشد و تصاویر M را روی خط D نقطهٔ K و روی خط x'x نقطهٔ P مینامیم داریم

$$FP=\overline{OP}-\overline{OF}=x-c$$

و

$$MK=PH=OH-OP=\frac{a^2}{c}-x$$

و چون نقطهٔ M را متعلق بمکان مزبور فرض کرده‌ایم

$$\frac{MF}{MK}=e \quad \text{و یا} \quad MF^2=e^2\times MK^2$$

اما در مثلث قائم‌الزاویهٔ MPF داریم $FP^2+PM^2=MF^2$

واز آنجا $FP^2+PM^2=e^2\times MK^2$

واز محاسبه‌ی شبیه آنچه درحالت اول کردیم نتیجه میشود

$$x^2\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)+y^2=a^2-c^2$$

وچون c^2-a^2 را b^2 فرض کنیم* حاصل میشود

$$-\frac{b^2x^2}{a^2}+y^2=-b^2$$

وبا ملاحظه

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$$

یعنی نقطهٔ M که متعلق بمکان مذکوراست روی هذلولی (h) که طول محور کانونی آن 2a و فاصلهٔ کانونی آن 2c است واقع میباشد (نقطهٔ F یکی از کانونهای این هذلولی است).

برعکس اگر نقطهٔ M بمختصات x و y روی هذلولی (h) واقع باشد و تصاویر آنرا روی خط D نقطهٔ K و روی خط x'x نقطهٔ P نامیم داریم

$$MF=\left|\frac{cx}{a}-a\right|=\frac{|cx-a^2|}{a} \quad \text{(شمارهٔ ۸۸۰)}$$

وهمچنین

$$KM=FP=OP-\overline{OH}=x-\frac{a^2}{c}=\frac{cx-a^2}{c}$$

پس

$$KM=\frac{|cx-a^2|}{c}$$

وازمقایسهٔ این روابط نتیجهٔ میشود: $\frac{MF}{MK}=\frac{c}{a}=e$ یعنی هر نقطه که روی هذلولی (h) واقع باشد متعلق بمکان مزبور میباشد و قضیه دراین حالت نیز ثابت است

---

* در اینجا چون $e=\frac{c}{a}$ بزرگتر از یك است پس:

$$c>a \quad \text{و} \quad c^2-a^2>0$$

تعریف - خط (D) را خط هادی نظیر کانون F متعلق به هذلولی (H) میامند و عدد e را که مساوی با نسبت $\frac{c}{a}$ و بزرگتر از یك است **خروج ازمرکز هذلولی** میگویند.

چون محور y'y محور تقارن هذلولی است واضح است که خط D' قرینهٔ خط D نسبت به y'y نیز خط‌هادی نظیر کانون F' ازهذلولی میباشد

تمرین - اگر نقطهٔ F روی خط D واقع باشد مکان هندسی نقاطی مانند M که نسبت فاصلهٔ آنها از نقطهٔ F بفاصله‌شان از خط D مساوی عدد e باشد چیست ؟

۹۰۴ - ترسیم خطوط هادی بیضی وهذلولی - اگر (D) خط هادی نظیر کانون F از یك بیضی یا از یك هذلولی باشد وتصویر F را روی خط (D) نقطهٔ H بنامیم درشمارهٔ قبل دیدیم که چه درمورد بیضی و چه درمورد هذلولی داریم :

$$\overline{OF}\times\overline{OH}=a^2$$ (a نصف طول محورکانونی است)

اما O مرکز دایرهٔ اصلی و a شعاع آنست ونظر بتعریف قطبی یك نقطه نسبت بیك‌دایره (شمارهٔ ۴۸۹ متمم‌مقالات‌سوم وچهارم) میتوان گفت:

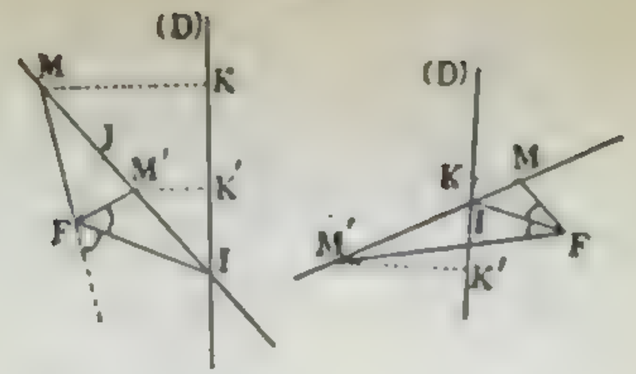
خط هادی نظیر یك کانون بیضی یا هذلولی عبارتست از قطبی آن کانون نسبت بدایرهٔ اصلی.

وازاینرو طریقهٔ ترسیم خط‌هادی نظیر یك کانون بیضی و یاهذلولی بدست میآید (شمارهٔ ۴۹۲ متمم مقالات سوم وچهارم)

تمرین - ثابت کنید که خط‌هادی نظیر یك کانون هذلولی ازتصاویر همان کانون بردوخط مجانب میگذرد .

خاصیت‌های مشترك بیضی وهذلولی وسهمی

۹۰۵ - قضیه - هرگاه خط راستی یکی از مقاطع‌های مخروطی‌را درنقاط M و M' وخط‌هادی‌نظیر کانون F متعلق بمقطع مزبور را در نقطهٔ I قطع کند خط راست FI یکی از خطوط نیمساز زوایای دوخط FM و FM' است.



(ش ۷۰۵) (ش ۷۰۴)

اگر خط هادی نظیر کانون F را (D) وتصاویر نقاط M و M' را روی خط (D) بترتیب نقاط K و K' بنامیم داریم :

$$\frac{MF}{MK}=e \quad \text{و} \quad \frac{M'F}{M'K'}=e$$

واز آنجا

$$\frac{MF}{M'F}=\frac{MK}{M'K'}$$

و چون تشابه مثلث‌های MIK و M'IK' را در نظر بگیریم نتیجه میشود :

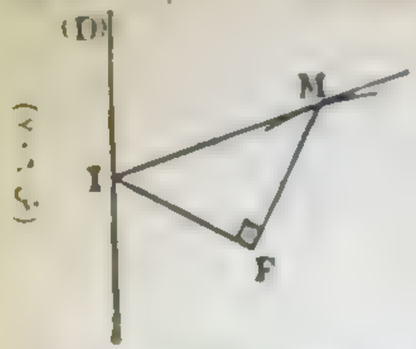
$$\frac{MF}{M'F}=\frac{IM}{IM'}$$

ازاین تساوی معلوم میشود که اگر نقطهٔ I بین نقاط M و M' واقع باشد (ش ۷۰۴) FI نیمساز زاویه داخلی F از مثلث MFM' است واگر نقطهٔ I روی‌خط MM' خارج ازقطعه‌خط MM' واقع باشد (ش۷۰۵) FI نیمساز زاویهٔ خارجی F ازمثلث MFM' میباشد (شماره‌های ۲۸۲ و ۲۸۵ از مقالهٔ سوم)

تنها حالتی که نقطهٔ I بین نقاط M و M' واقع‌است یعنی نقاط M و M' در دوطرف خط هادی قرار دارند حالتی است که مقطع مخروطی هذلولی است و نقاط M و M' هردو روی یك‌شاخهٔ آن واقع نیستند در این‌حالت FI نیمساز داخلی‌زاویهٔ F ازمثلث MFM' است ودرجمیع حالات دیگر FI نیمساز زاویهٔ خارجی زاویهٔ F ازمثلث MFM' میباشد

۹۰۶ - نتیجه - فرض کنیم نقاط M و M' دریك طرف خط‌هادی ومجاور یکدیگر واقع باشند . در اینصورت FI نیمساز زاویهٔ خارجی F از مثلث MFM' است (ش۷۰۵) حالا اگر نقطهٔ M' روی‌منحنی حرکت کند و بنقطهٔ M نزدیك و بالاخره برآن منطبق شود در اینصورت خط

MM' برخط مماس در نقطهٔ M برمنحنی منطبق میشود و اگر پای عمود داخلی F از مثلث MFM' را روی خط MM' نقطهٔ I بنامیم نقطهٔ I بر M منطبق میگردد و FI که همواره بر FI عمود است بر FM عمود یعنی زاویهٔ IFM قائمه میشود پس



(ش ۷۰۸)

قطعه‌ای از خط مماس بر هریك ازمقطع‌های مخروطی که بین نقطهٔ تماس وخط‌هادی (D) محصور باشد از کانون F که خط هادی (D) نظیر آنست بزاویهٔ قائمه دیده میشود.

تمرین ـ تحقیق کنید که اگر از نقطهٔ I واقع برخط هادی (D) دو مماس بریك‌مقطع مخروطی رسم کنیم و نقاط‌تماس آنهارا M و N بنامیم خط راست MN از کانون F که خط‌هادی (D) نظیر آنست میگذرد.

۵ ـ فصل مشترك سطح مخروطی دوار بایك‌صفحه

۹۰۷ ـ قضیهٔ داندلن* ـ اگر یك‌سطح مخروطی‌دوار را با صفحه‌ای که از رأس آن نگذرد و برمحور آن عمود نباشد قطع کنیم منقطع یك‌بیضی ویا یك‌هذلولی ویایك سهمی است.

محور سطح‌مخروطی‌دوار را SX مینامیم و صفحه‌ای را که از محور سطح مخروطی دوار میگذرد و برصفحهٔ قاطع عمودشود صفحهٔ شکل اختیار میکنیم این‌صفحه سطح مخروطی دوار را در دومولد SU و SV و صفحهٔ قاطع را در خط راست P قطع میکند اکنون سه‌حالت سیر میدهیم

حالت اولـ خط P مولدهای SU و SV را دردو نقطهٔ A و B قطع میکندواین‌دو نقطه هردو روی یك‌دامنهٔ‌سطح مخروطی قراردارند***.

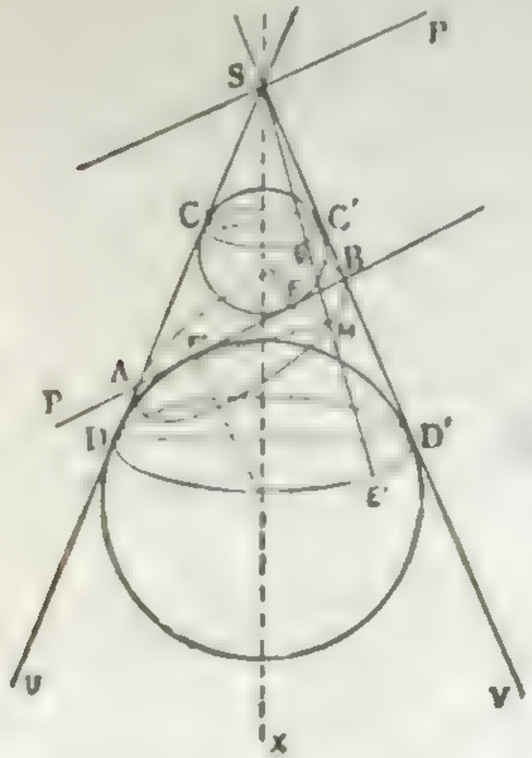
در اینحالت مقطع یك‌بیضی است

* Dandelin

** برای تعاریف وقضایای مربوط سطح‌مخروطی شماره‌های ۷۳۸ و ۷۳۹ و ۷۴۲ و ۷۴۵ تا ۷۴۸ مقالهٔ قطع رجوع کنید

*** دراینحالت اگر خط SP را در رأس سطح مخروطی موازات خط P رسم کنیم این‌خط درخارج زاویهٔ USV واقع خواهد شد (ش ۷۰۷)

دایرهٔ محاطی داخل مثلث SAB را رسم میکنیم و نقاط تماس آنرا بضلع AB نقطهٔ F و با اضلاع دیگر نقاط C و C' مینامیم (ش ۷۰۷) و همچنین‌دایرهٔ‌محاطی‌خارج‌مثلث SAB واقع‌درزاویهٔ S را رسم میکنیم و نقاط تماس آنرا باضلع AB نقطهٔ F' و با اضلاع دیگر نقاط D و D' میخوانیم.



(ش ۷۰۸)

اگر خط SU و دو دایرهٔ مزبور را در حول‌محور SX دوران دهیم از دوران خط SU سطح مخروطی دوار مفروض و از دوران‌دو دایرهٔ‌مذکور دو کره تولیدمیشود و این دو کره درنقاط F و F' با صفحهٔ قاطع مماسند و در سطح مخروطی محاطند شده دایره‌های تماس این دو کره با سطح مخروطی دو دایرهٔ صغیره هستند که قطرهایشان CC' و DD' میباشند واین دودایره را میتوان دومدار از سطح مخروطی دوار دانست

حال اگر نقطهٔ M را محل صفحهٔ مورد بحث فرض کنیم چون دو کرهٔ محاطی در دوطرف صفحهٔ قاطع واقع میباشند نقطهٔ M روی سطح مخروطی مابین دومدار CC' و DD' قرار دارد

قطر مشترك‌مولد SM را با دومدار CC' و DD' بترتیب نقاط E و E' مینامیم خط راست MF بر کره‌ای که از F میگذرد مماس است زیرا این خط درصفحهٔ‌مماس بر کرهٔ مزبور واقع است واز نقطهٔ تماس F میگذرد و نیز خط راست ME در نقطهٔ E برهمان کره مماس میباشد زیرا این خط

یکی از مولدهای [illegible] سطح مخروطی است (شمارهٔ ۷۹۱ مقالهٔ هفتم) بنابراین داریم :

$MF = ME$ و بهمین‌دلیل $MF' = ME'$

وچون M بین نقاط E و E' قرار دارد ازدو تساوی فوق نتیجه میشود:

$$MF + MF' = ME + ME' = EE'$$

اما EE' که قسمتی ازخط مولد است ومابین دومدار CC' و DD' محصور میباشد طولش ثابت و مساوی باطول (D) است پس :

$$MF + MF' = CD = \text{طول ثابت}$$

بنابراین نقطهٔ M متعلق است بیك بیضی که درصفحهٔ قاطع واقع میباشد وکانونهایش نقاط F و F' هستند وچون این بیضی ناچار ازنقاط A و B میگذرد و این دونقطه روی محور کانونی آن واقع هستند AB محوراطول این بیضی است. وقتی مولد SE سطح مخروطی دوار را بپیماید نقطهٔ M بیضی مزبور را طی خواهد کرد و قضیه دراین حالت ثابت است.

تمرین ـ تحقیق کنید که اگر از نقطهٔ B عمودی برمحور SX رسم کنیم و فصل مشترك آنرا با SU نقطهٔ B' بنامیم AB' مساوی با فاصلهٔ کانونی بیضی مقطع است

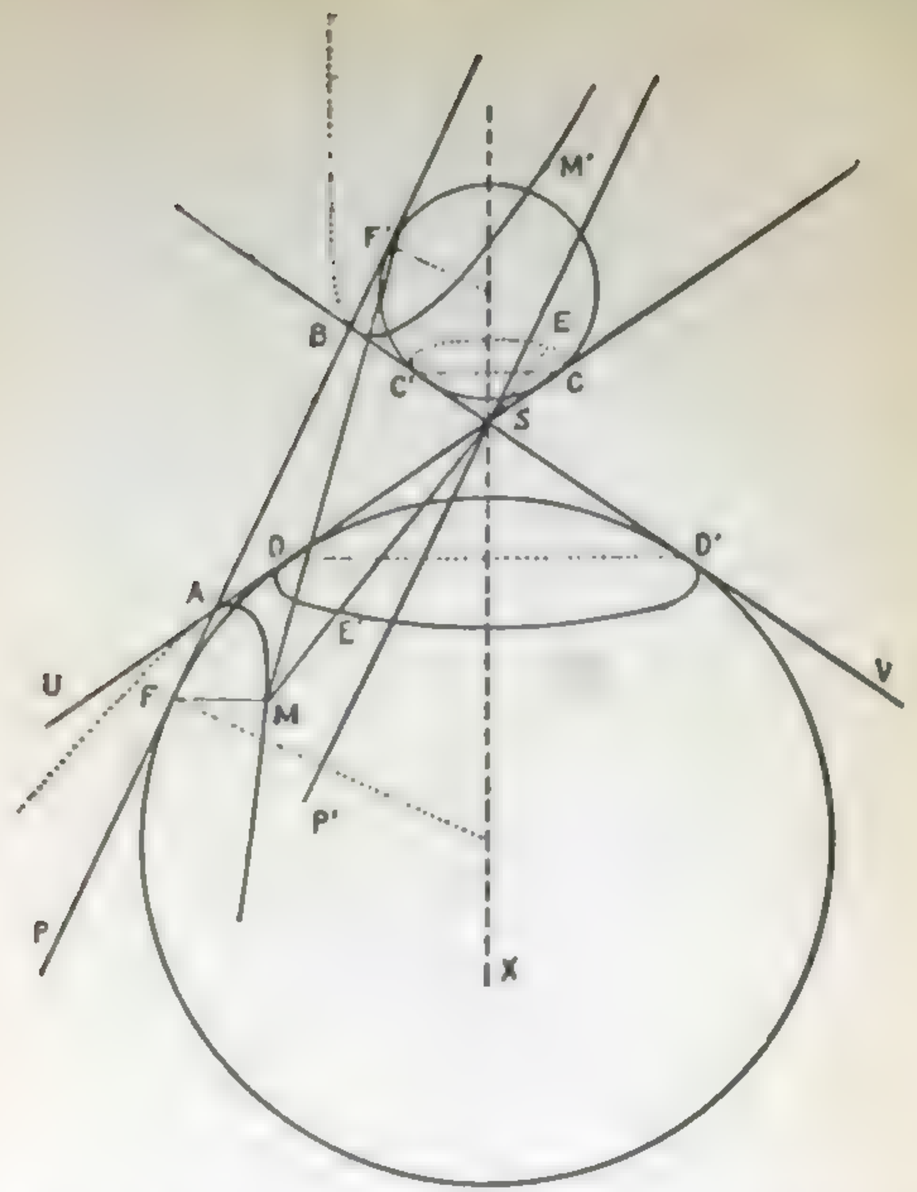
حالت دوم ـ خط P مولدهای SU و SV را در دونقطهٔ A و B قطع میکند واین دو نقطه روی یك دامنهٔ سطح مخروطی واقع نیستند*.

دراین‌حالت مقطع یك‌هذلولی است

دایرهٔ محاطی خارج مثلث SAB را که درزاویهٔ B واقع‌است رسم میکنیم و نقاط تماس آنرا باخط AB نقطهٔ F و با خطوط SA و SB نقاط D و D' مینامیم (ش ۷۰۸) و همچنین دایرهٔ محاطی خارج مثلث SAB را که در زاویهٔ A واقع است رسم میکنیم ونقاط تماس آنرا باخط AB نقطهٔ F' وباخطوط SA و SB نقاط C و C' میخوانیم.

اگر خط SU و دو دایرهٔ مزبور را درحول محور SX دوران دهیم ازدوران‌خط SU سطح مخروطی دوار مفروض و ازدوران دودایرهٔ مذکور دو کره تولید میشود و این دو کره درنقاط F و F' باصفحهٔ قاطع مماسند و درسطح مخروطی محاط میباشند. دایره‌های تماس این دو کره باسطح

* دراینحالت اگرخط SP' را موازات خط P رسم کنیم قسمی ازاین‌خط در داخل زاویهٔ VSU واقع خواهدشد (ش ۷۰۸)



(ش ۷۰۸)

مخروطی دوایرهٔ صغیرهستند که قطرهاشان CC' و DD' میباشند و این دو دایره را میتوان دو مدار از سطح مخروطی دوار دانست

حال اگر نقطهٔ M را متعلق بمقطع مورد بحث و روی شاخه‌ای که از A میگذرد فرض کنیم چون دایرهٔ محاطی در طرف صفحهٔ قاطع واقع میباشد نقطهٔ M روی سطح مخروطی درخارج قسمتی که بین دومدار CC' و DD محصور است واقع میباشد. فصل‌مشترك مولدSMرابادومدار CC'

و DD' بترتیب نقاط E و E' مینامیم. بهمان دلیل که درحالت اول گفتیم داریم $MF'=ME$ و $MF=ME'$

وچون نقطهٔ M خارج از قطعه‌خط EE' قراردارد ازدوتساوی فوق نتیجه میشود :

$$MF'-MF=ME-ME'=EE'$$

اما EE' که‌قسمتی ازخط مولد است و مابین دومدار CC' و DD' محصور میباشد طولش ثابت ومساوی‌با طول CD است.

پس $MF'-MF=CD$

اگر بجای نقطهٔ M نقطهٔ M' را روی شاخه‌ای که از B میگذرد اختیار کنیم حاصل میشود:

$M'F-M'F'=CD=$ طول‌ثابت

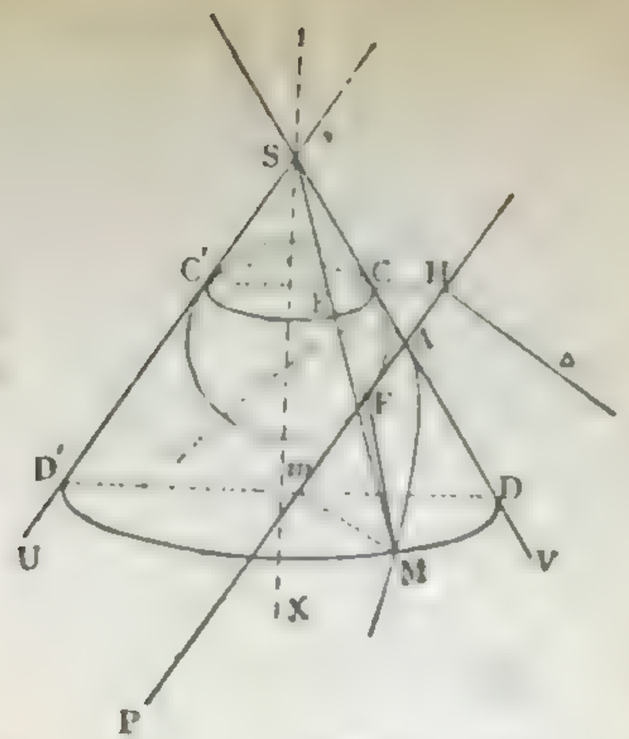
بنابراین نقاط M و M' متعلق هستند بیك‌هذلولی که درصفحهٔ قاطع واقع میباشد و کانونهایش نقاط F و F' هستند وچون این‌هذلولی ناچار ازنقاط A و B میگذرد واین دونقطه روی محور کانونی آن واقع هستند AB محور کانونی این هذلولی است . وقتی مولد SE سطح مخروطی را بپیماید نقاط M و M' هذلولی مزبور را طی خواهند کرد و قضیه در اینحالت نیز ثابت است.

تمرین - تحقیق کنید که اگر از نقطهٔ B عمودی برمحور SX رسم کنیم‌وفصل‌مشترك‌آنرا با SU نقطهٔ B' بنامیم AB' مساوی‌با فاصلهٔ کانونی هذلولی مقطع است.

حالت سوم - خط P با یکی‌از مولدهای SU و SV مثلا با SU موازیست و مولد SV را درنقطهٔ A قطع میکند. در اینحالت مقطع یك سهمی است.

دایره‌ای رسم میکنیم که مرکزش روی محور SX واقع باشد و با سه‌خط راست SU و SV وAP مماس شود و نقاط تماس این دایره را با سه‌خط مزبور بترتیب C' و C و F مینامیم (ش۷۰۹) وفصل‌مشترك خطوط CC' و P را نقطهٔ H میخوانیم

اگر خط SU و دایرهٔ مزبور را حول محور SX دوران دهیم از دوران‌خط SU سطح مخروطی‌دوارمفروض وازدوران دایرهٔ‌مذکوریك کره تولید میشود و این کره درنقطهٔ F با صفحهٔ قاطع مماس است و در سطح



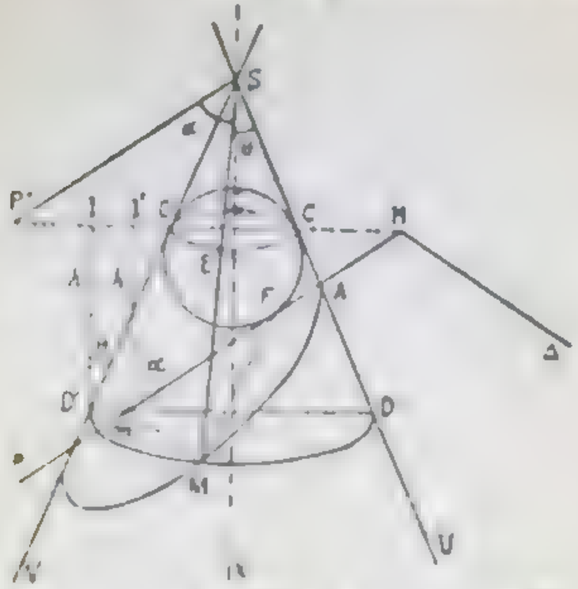
(ش ۷۰۹)

مخروطی محاط میباشد. دایرهٔ تماس این کره باسطح مخروطی یك دایرهٔ صغیره است که قطرش CC' میباشد و این دایره را میتوان یك‌مدار سطح مخروطی دوار دانست. صفحهٔ این مدار صفحهٔ‌قاطع‌را درخط Δ که‌درنقطهٔ H برصفحهٔ USV عمود است قطع میکند

حال اگر نقطهٔ M را متعلق بمقطع مورد بحث فرض کنیم وفصل مشترك مولد SM را با مدار CC' نقطهٔ E بنامیم بهمان دلیل که درحالت اول گفتیم داریم $MF=ME$. تصویر نقطهٔ M را روی خط AP نقطهٔ m مینامیم. Mm با Δ موازیست و اگر مداری از سطح مخروطی را که از نقطهٔ M میگذرد رسم کنیم قطری از آن که در صفحهٔ USV واقع است عمودیست که از m بر SX رسم شود . فصل مشترکهای این عمود را با SU و SV نقاط D' وD مینامیم. واضح‌است که $ME=CD=C'D'$ و در متوازی‌الاضلاع C'D'mH داریم $C'D'=mH$ پس $MF=mH$

اما mH مساویست بافاصلهٔ نقطهٔ M ازخط Δ بنابراین‌نقطهٔ M متعلق است بیك سهمی که درصفحهٔ قاطع واقع میباشد و کانونش نقطهٔ F و خط هادیش Δ است . وقتی مولد SE سطح‌مخروطی‌را بپیماید نقطهٔ M سهمی مزبور را طی میکند.

۹۰۸ - خطوط هادی مقطع های مخروطی - در استدلالی که درحالت سوم شماره قبل بیان کردیم خط هادی سهمی را بکار بردیم میتوان این استدلال را در دو حالت دیگر نیز بعمل داد



(ش ۷۱۰)

همانطور که درشماره‌های قبل گفتیم یک سطح مخروطی دوار را در نظر میگیریم ومحور آنرا SX مینامیم صفحه‌ای که ازمحور SX میگذرد این سطح مخروطی را درمولدهای SU و SV قطع میکند این صفحه را صفحهٔ شکل اختیار میکنیم و فصل‌مشترک صفحهٔ قاطع را با این صفحه خط P مینامیم . از نقطهٔ S خط SP را موازی P رسم میکنیم وزاویهٔ PSX را که مساوی با زاویهٔ محور SX با صفحهٔ قاطع است α ونیم زاویهٔ رأس سطح مخروطی‌دوار یعنی زاویهٔ XSU را θ مینامیم.

دایره‌ای رسم میکنیم که مرکزش روی محور SX واقع باشد و با خطوط SU و SV و P بترتیب در نقاطی مانند C و C' و I مماس شود و فصل‌مشترک خط CC' را با خط P نقطهٔ H مینامیم

از دوران خط SU و دایرهٔ مرسوم درحول محور SX بترتیب سطح مخروطی دوار رسم وشیوه یک کره محاط در آن ایجاد شود و این کره در نقطهٔ I با صفحهٔ قاطع مماس است و دایرهٔ تماس سطح مخروطی با کره محاط در آن مدار CC' از سطح مخروطی است صفحه این مدار صفحهٔ قاطع را در خط راستی مانند L که از نقطهٔ H میگذرد و برصفحهٔ USV عمود است قطع میکند.

اگر نقطهٔ M را معمولی بسطح مورد بحث فرض کنیم و فصل‌مشترک مولد SM را بمدار (C') نقطهٔ I بنامیم همانطور که دیدیم

$$MI = ME$$

اکنون مداری را که از نقطهٔ M میگذرد در نظر میگیریم و فصل مشترکهای آنرا با SU و SV نقاط D و D' مینامیم و فرض میکنیم نقطهٔ m تصویر نقطهٔ M روی خط P باشد خط Mm باخط L موازیست و نقطهٔ m روی خط DD' نیز واقع است وداریم :

$$MF = ME = C'D' = CD$$

بنابراین اگر از نقاط m و D' عمودهای mI' و D'I را بر خط CC' فرود آوریم وطول مشترک این عمودها را h بنامیم در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ D'IC' و mI'H که یک‌زاویهٔ حاده ازاولی مساوی‌با θ و یک زاویهٔ حاده از دومی مساوی‌با α است (ش۷۱۰) داریم :

$$mH = \frac{h}{\cos\alpha} \quad و \quad C'D' = \frac{h}{\cos\theta} = MF$$

از اینرو نتیجه میشود

$$\frac{MF}{mH} = \frac{\cos\alpha}{\cos\theta}$$

وچون mH مساوی با فاصلهٔ نقطهٔ M از خط L است از رابطهٔ اخیر معلوم میشود که نقطهٔ M روی یک مقطع مخروطی واقع است که نقطهٔ I کانون آن و خط L خط‌هادی نظیر کانون I از آن میباشد

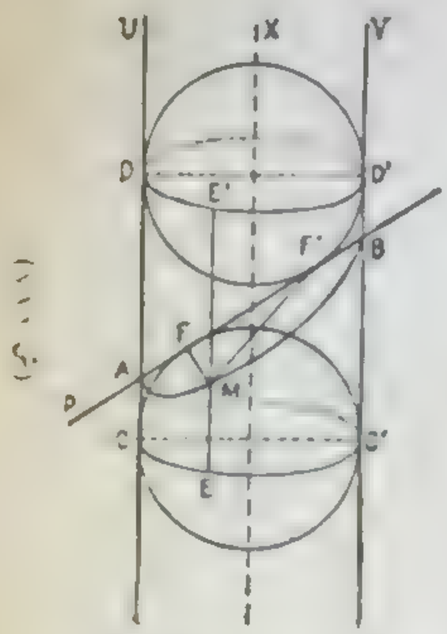
بحث - اگر α بزرگتر از θ باشد $\frac{\cos\alpha}{\cos\theta}$ از یک کوچکتر ومقطع بیضی است در اینصورت صفحه‌ای که از خط SP' میگذرد و برصفحهٔ USV عمود باشد سطح مخروطی را قطع نمیکند

اگر α مساوی‌با θ باشد $\frac{\cos\alpha}{\cos\theta}$ مساوی با یک است و مقطع سهمی است

اگر α کوچکتر از θ باشد $\frac{\cos\alpha}{\cos\theta}$ از یک بزرگتر است و مقطع یک هذلولی است. دراینصورت صفحه‌ای که از خط SP' میگذرد و برصفحهٔ USV عمود باشد سطح مخروطی را قطع خواهد کرد.

۹۰۹ - فصل‌مشترك سطح استوانه‌ای دوار با یك صفحه

قضیه - فصل‌مشترك یك‌سطح استوانه‌ای دوار باصفحه‌ای که نه با محور آن موازی و نه بر محور آن عمود باشد یك بیضی است.



(ش ۷۱۱)

صفحه‌ای را که از محور سطح استوانه‌ای دوار بگذرد و بر صفحهٔ قاطع عمود باشد صفحهٔ شکل اختیار میکنیم این صفحه سطح استوانه‌ای دوار را دردومولد U و V وصفحهٔ قاطع را درخط‌راست P قطع‌میکند (ش۷۱۱) فصل‌مشترکهای خط P را بامولدهای U و V بترتیب A و B مینامیم.

دو دایره میتوان رسم کرد که با سه خط U و V و P مماس باشند. نقاط تماس این دو دایره را باخط P نقاط F و F' و با مولد U نقاط C و D و بامولد V نقاط C' و D' مینامیم.

اگر خط U و دودایرهٔ مرسوم راحول محورسطح‌استوانه‌ای دوران دهیم از دوران U سطح استوانه‌ای دوار واز دوران دو دایره دو کره تولید میشود واین‌دو کره که درسطح استوانه‌ای دوار محاطهستند . صفحهٔ قاطع درنقاط F و F' مماس میباشند. دوایر تماس دو کرهٔ مزبور باسطح استوانه‌ای دوار دودایره بقطرهای CC' و DD هستند و این دو دایره را میتوان دومدار از سطح استوانه‌ای دوار دانست.

حال اگر نقطهٔ M را متعلق بمقطع مورد بحث فرض کنیم چون دو کرهٔ محاطی در دوطرف صفحهٔ قاطع واقع میباشند نقطهٔ M روی سطح استوانه‌ای مابین دومدار CC' و DD' قرار دارد.

فصل‌مشترك مولدی را که از نقطهٔ M میگذرد با دو مدار CC' و DD' بترتیب نقاط E و E' مینامیم. خطراست MF بر کره‌ای که‌از F میگذرد

مماس است زیرا این‌خط درصفحهٔ مماس بر کرهٔ مزبور واقع‌است واز نقطهٔ تماس F میگذرد و همچنین خطراست ME در نقطهٔ E برهمان کره‌مماس میباشد زیرا این‌خط یکی از مولدهای سطح استوانه‌ایست (شمارهٔ ۷۹۴ مقالهٔ هفتم) بنابراین داریم

$MF = ME$ و بهمین‌دلیل $MF' = ME'$

و چون M مابین نقاط E و E' قرار دارد از دو تساوی فوق نتیجه میشود

$$MF + MF' = ME + ME' = EE'$$

اما EE' که قسمتی از خط مولداست ومابین دومدار CC' و DD' محصور میباشد طولش ثابت و مساوی‌با طول CD است پس

$$MF + MF' = CD = \text{طول‌ثابت}$$

بنابراین نقطهٔ M متعلق است بیك بیضی که در صفحهٔ قاطع واقع میباشد و کانونهایش نقاط F و F' هستند و چون این بیضی ناچار از نقاط A و B میگذرد و این دو نقطه روی محور کانونی آن واقع هستند AB محور اطول این بیضی است . وقتی مولد EE' سطح استوانه‌ای دوار را بپیماید نقطهٔ M بیضی مزبور را طی خواهد کرد .

تمرین- تحقیق کنید که اگراز نقطهٔ B عمودی برمحور X'X رسم کنیم و فصل‌مشترك آنرا با خط U نقطهٔ B' بنامیم BB' مساوی‌با محور اقصر بیضی مقطع است .

مسائل مقالهٔ هشتم

بیضی

یك بیضی بامعلومات زیر معین کنید. (یعنی کانونها وطول محور کانونی آنرا پیدا کنید)

۱ ــ دوکانون و یك مماس

۲ ــ یك کانون و سه مماس

۳ ــ یك کانون و دومماس و نقطهٔ تماس یکی از آنها

۴ ــ یك کانون و یك رأس و یك مماس

۵ ــ رأسهای یك محور و یك نقطه .

۶ ــ رأسهای یك محور و یك مماس

۷ ــ محلهای دومحور و دو نقطه

۸ ــ دومماس و مرکز و طول $2a$

۹ ــ یك کانون و یك نقطه و طولهای $2a$ و $2b$

۱۰ ــ یك رأس از محور اطول و یك کانون و یك مماس

۱۱ ــ یك کانون و دومماس و یك نقطه

۱۲ ــ یك کانون و یك مماس و دو نقطه

۱۳ ــ یك کانون و سه نقطه

۱۴ ــ یك رأس از محور اقصر و یك کانون و یك مماس

۱۵ ــ یك رأس از محور اقصر و یك کانون و یك نقطه

۱۶ ــ یك مماس متحرك بر بیضی رسم میکنیم تا دو مماس ثابت بر آنرا در نقاط M و M' قطع کند. ثابت کنید که قطعه‌خط MM' از یك کانون بیضی بزاویهٔ ثابتی دیده میشود

۱۷ ــ یك کانون از بیضی (E) ثابت است و این بیضی از یك نقطهٔ ثابت

میگذرد و در این نقطه بر یك خط ثابت مماس است مکان هندسی کانون دیگر آنرا معین کنید

۱۸ ــ یك کانون از بیضی (L) ثابت است و این بیضی بر دو خط ثابت مماس میباشد مکان هندسی مرکز آنرا تعیین کنید.

۱۹ ــ یك کانون از بیضی (L) ثابت است و این بیضی از یك نقطهٔ ثابت میگذرد و با یك خط ثابت مماس است مکان هندسی کانون دیگر آنرا تعیین کنید .

۲۰ ــ یك خط مماس بر یك بیضی مماسهایی راکه در رأسهای محور اطول بر آن رسم شوند در نقاط M و M' قطع میکند. ثابت کنید که دایرهٔ بقطر MM' از دو کانون بیضی میگذرد

۲۱ ــ سه نقطهٔ A و B و C روی یك خط راست واقعند و C بین A و B قرار دارد . دایره متغیری در نقطهٔ A بر خط ABC مماس است و مماسهایکه از نقاط B و C بر این دایره رسم میشوند یکدیگر را در نقطهٔ M قطع میکنند مطلوبست تعیین مکان هندسی نقطهٔ M

هذلولی

یك هذلولی بامعلومات زیر معین کنید. (یعنی کانونها و طول محور کانونی آنرا پیدا کنید).

۲۲ ــ دوکانون و یك مماس

۲۳ ــ یك کانون و سه مماس

۲۴ ــ یك کانون و دومماس و نقطهٔ تماس یکی از آنها

۲۵ ــ یك کانون و یك رأس و یك مماس

۲۶ ــ رأسها و یك نقطه

۲۷ ــ رأسها و یك مماس

۲۸ ــ دومماس و مرکز و طول $2a$

۲۹ ــ دوکانون و راستای یك خط مجانب

۳۰ ــ یك کانون و یك خط مجانب و طول $2a$

۳۱ ــ دوخط مجانب و طول $2a$ و طول $2c$

۳۲ ــ یك کانون و یك خط مجانب و یك مماس

۳۳ ــ نسبت $\frac{c}{a}$ و یك رأس و یك خط مجانب

۳۴ ـ یك کانون و یك مماس و دو نقطه

۳۵ ـ یك کانون و دو مماس و یك نقطه

۳۶ ـ یك کانون و سه نقطه

۳۷ ـ یك کانون و یك نقطه و طولهای a و b

۳۸ ـ مطلوبست مکان هندسی مراکز دایره‌هایی که با دو دایرهٔ معلوم مماس باشند.

۳۹ ـ یك مماس متحرك بریك هذلولی رسم میکنیم تا دو مماس ثابت برآنرا در نقاط M و M' قطع کند ثابت کنید که قطعه خط MM' از یك کانون هذلولی زاویهٔ ثابتی دیده میشود.

۴۰ ـ یك کانون از هذلولی (H) ثابت است و این هذلولی بدو خط ثابت مماس میباشد. مکان هندسی کانون دیگر و مرکز آنرا معین کنید.

۴۱ ـ یك کانون از هذلولی (H) ثابت است و این هذلولی از دو نقطهٔ ثابت میگذرد مکان هندسی کانون دیگر و مرکز آنرا معین کنید.

۴۲ ـ سه نقطهٔ A و B و C روی یك خط راست واقعند و نقطهٔ B بین نقاط A و C قرار دارد. دایرهٔ متغیری در نقطهٔ B با خط AdC مماس است و مماسهاییکه از نقاط A و C براین دایره رسم میشوند یکدیگر را در نقطهٔ M قطع میکنند. مطلوبست تعیین مکان هندسی نقطهٔ M.

سهمی

یك سهمی با معلومات زیر معین کنید (یعنی کانون و خط هادی آنرا پیدا کنید).

۴۳ ـ کانون و دو نقطه

۴۴ ـ کانون و دو مماس

۴۵ ـ کانون و یك مماس و نقطهٔ تماس آن

۴۶ ـ خط هادی و دو نقطه.

۴۷ ـ خط هادی و دو مماس.

۴۸ ـ خط هادی و یك مماس و یك نقطه.

۴۹ ـ خط هادی و یك مماس و نقطهٔ تماس آن.

۵۰ ـ کانون و یك نقطه و یك مماس

۵۱ ـ مماس در رأس و دو مماس دیگر.

۵۲ ـ مماس در رأس و یك نقطه و مماس در آن نقطه.

۵۳ ـ دو مماس و نقاط تماس آنها.

۵۴ ـ رأس و نقطه‌ای که مماس در آن بر سهمی با محور زاویهٔ ۴۵ درجه تشکیل میدهد

۵۵ ـ مطلوبست تعیین مکان هندسی مراکز دایره‌هایی که با یك خط راست و با یك دایره مماس باشند

۵۶ ـ مطلوبست تعیین مکان هندسی نقاطی که تفاضل فواصلشان از یك نقطهٔ معلوم و از یك خط راست معلوم مساوی مقدار مفروضی باشد

۵۷ ـ خط هادی یك سهمی ثابت است و این سهمی از نقطهٔ ثابت معلومی میگذرد مکان هندسی کانون آنرا معین کنید

۵۸ ـ مکان هندسی رأس سهمی مسئلهٔ ۵۷ را تعیین کنید

۵۹ ـ مکان هندسی کانونهای سهمی‌هایی را که خط هادی آنها ثابت است و با یك خط ثابت مماس میباشند تعیین کنید

۶۰ ـ مکان هندسی رأسهای سهمی‌های مسئلهٔ ۵۹ را تعیین کنید

مقالهٔ نهم

حاملها

۱ ـ یادآوری تعاریف

۹۱۰ ـ تعاریفی را که در متمم مقالات اول و دوم و سوم و چهارم دیده‌ایم در اینجا یادآوری و کامل میکنیم :

محور خط راست نامحدودیست که روی آن جهت حرکت در نظر گرفته باشیم.

حامل قطعه خطی است که روی آن جهت حرکت در نظر گرفته باشیم.

وقتی از حامل $\overrightarrow{AB}$ گفتگو میکنیم جهت حرکت از A بطرف B را جهت حامل اختیار کرده‌ایم و نقطهٔ A **مبدأ** و نقطهٔ B **منتهای** حامل $\overrightarrow{AB}$ است (ش۷۱۲) طول قطعه‌خط AB را **طول** حامل $\overrightarrow{AB}$ میگویند. خط راست نامحدود AB را **محمل**

(ش ۷۱۲)

حامل $\overrightarrow{AB}$ مینامند. گاهی یک حامل را فقط با یک حرف مینمایانند : $\vec{V}$

واضح است که اگر مبدأ و منتهای یک حامل معلوم باشند آن حامل معین است و نیز میتوان برای تعیین یک حامل مبدأ و محمل وجهت و طول آنرا معین کرد.

اندازهٔ جبری یک حامل روی یک محور ـ هرگاه یک حامل مانند $\overrightarrow{AB}$ و یک محور مانند x'x را که بر AB منطبق و یا با آن موازی باشد در نظر بگیریم :

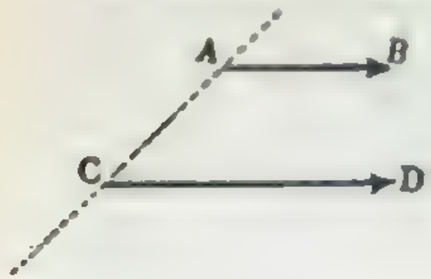
اندازهٔ جبری حامل $\overrightarrow{AB}$ روی محور x'x عددیست جبری که قدرمطلق آن طول حامل AB و علامت آن مثبت و یا منفی است برحسب آنکه حامل $\overrightarrow{AB}$ بامحور x'x متحدالجهت و یا مختلف‌الجهت باشد.

اندازهٔ جبری حامل $\overrightarrow{AB}$ را با علامت قراردادی $\overline{AB}$ نشان میدهند. میتوان حالتی را که نقطهٔ A بر نقطهٔ B منطبق شود درنظر گرفت. دراینصورت میگویند حامل $\overrightarrow{AB}$ صفر است.

هرگاه محمل‌های دو حامل برهم منطبق یا باهم موازی باشند میگویند که راستای آن دو حامل یکی است.

اگر راستای دو حامل یکی باشد آندو حامل با متحدالجهت هستند و یا مختلف‌الجهت :

اگر محمل‌های دوحامل برهم منطبق باشند در صورتی آندو حامل را **متحدالجهت** میگویند که اندازه‌های جبری آنها متحدالعلامه باشند و اگر محمل‌های دوحامل باهم‌موازی باشند در صورتی آندو حامل را **متحدالجهت** میگویند که هردو در یک طرف خط راستی که از دو مبدأ آنها میگذرد واقع باشند (ش ۷۱۳) قبول میکنیم که در اینحالت دوحامل دریک‌طرف هرصفحه‌ای که از دو مبدأ آنها بگذرد واقع هستند (البته غیراز صفحه‌ای که دو حامل در آن قراردارند).



(ش ۷۱۳)

طول یک نقطهٔ متعلق بیک محور ـ روی محور x'x نقطه‌ای را مانند O بعنوان مبدأ اختیار میکنیم. اگر نقطه‌ای مانند M روی محور x'Ox واقع باشد عدد جبری $\overline{OM}$ یعنی اندازهٔ جبری حامل $\overrightarrow{OM}$ را **طول نقطهٔ M** مینامند.

رابطهٔ شال (Chasles) - اگر نقاط A و B و C و . . . . و K و L روی یك محور واقع باشد بازای جمیع اوضاع نسبی این نقاط رابطهٔ زیر که برابطهٔ شال موسوم است برقرار میباشد (شمارهٔ ۲۰۹ متمم مقالات اول و دوم)

$$AB+BC+\ldots+KL=AL$$

اندازهٔ جبری یك حامل برحسب طولهای مبدأ و منتهای آن-

اگر حامل $\overrightarrow{AB}$ روی محور $x'Ox$ واقع باشد داریم

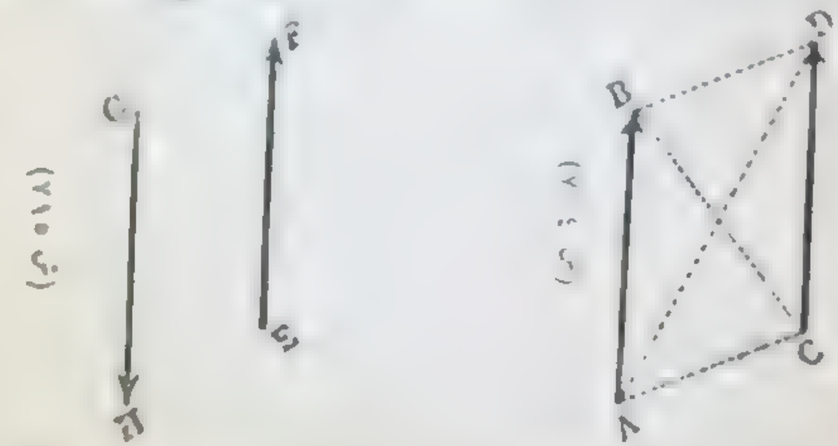
$$\overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}$$

یعنی : اندازهٔ جبری هرحامل مساویست با طول منتهای آن منهای طول مبدأش (شمارهٔ ۲۱۰ متمم مقالات اول دوم)

۹۱۱ - حاملهای همسنگ - دوحامل راهمسنگ مینامند درصورتیکه هردو دارای یك راستا و یك طول ومتحدالجهت باشند (ش ۷۱٤)

اگر دوحامل $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ همسنگ باشند اولا چهار ضلعی ABDC متوازی‌الاضلاع است و ثانیا حاملهای $\overrightarrow{C}$. و $\overrightarrow{BD}$ همسنگ هستند وثالثاً اوساط قطعه‌خطهای AD و BC برهم منطبق میباشند

هریك ازاین سه‌خاصیت ویژهٔ حاملهای همسنگ است یعنی اگر یکی ازاین سه‌خاصیت برقرار باشد حاملهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ همسنگ هستند - دو خاصیت اخیر اگر حاملهای AB و CD روی یك محل واقع باشد نیز برقرار است. (شکل‌را درحالات مختلف رسم واین‌موضوع‌را تحقیق کنید)



اگر دوحامل باحامل‌سومی همسنگ باشند خودشان همسنگ‌هستند.

۹۱۲ - حاملهای متقابل - دوحامل‌را معادل مینامند درصورتیکه هردو دارای یك راستا و یك‌طول اما مختلف الجهت باشند (ش ۷۱۵) اگر دوحامل معادل روی یك‌محور واقع باشند میگویند که آن دوحامل متقابلاً معادل هستند.

۹۱۳ - حاملهای متساوی - حاملها برای نمایاندن کمیت‌های معدودی بکار میروند و برحسب نوع این کمیت‌ها انواع مختلفی ازحاملها درنظر میگیرند. اختلاف نوع حاملها مربوط بتعریفی‌است که برای تساوی آنها میتوان اختیار کرد :

الف - اگر دوحامل‌را در صورتی متساوی بنامیم که برهم منطبق باشند در اینصورت حاملها را **مقید** میخوانند.

ب - اگر دوحامل را درصورتی متساوی بنامیم که همسنگ وروی یك‌محل واقع باشند در اینصورت حاملها را **لغزان** مینامند.

ج - اگر دو حامل را درصورتی متساوی بنامیم که‌همسنگ باشند در اینصورت حاملها را **آزاد** میخوانند.

در این کتاب ما همواره حاملهای آزادرا مورد مطالعه قرارمیدهیم یعنی **دوحامل را در صورتیکه همسنگ باشند متساوی مینامیم**✡

وقتیکه میگوییم حامل آزاد $\overrightarrow{AB}$ مقصود اینست که بجای حامل $\overrightarrow{AB}$ میتوانیم هرحامل دیگری راکه با حامل AB همسنگ باشد اختیار کنیم.

برای آنکه بیان کنیم که دوحامل $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ همسنگ یعنی متساوی هستند مینویسیم :

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD} \quad \text{یا} \quad \overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}$$

حاصلضرب یك‌حامل و یك‌عدد جبری

۹۱۴ - تعریف - حاصلضرب حامل آزاد $\overrightarrow{AB}$ وعدد جبری m حامل آزادیست مانند $\overrightarrow{A'B'}$ بقسمیکه اولا راستای حامل $\overrightarrow{A'B'}$ با راستای حامل $\overrightarrow{AB}$ یکی باشد

✡ پس اصطلاحات **همسنگ** و **متساوی** در این کتاب معادل یکدیگر هستند و میتوانیم یکی‌از آنها را بجای دیگری بکار بریم .

ثانیاً طول حامل $\overrightarrow{A'B'}$ مساوی باشد با طول حامل $\overrightarrow{AB}$ ضرب در قدرمطلق m یعنی $A'B' = |m| \times AB$

ثالثاً حاملهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{A'B'}$ اگر m مثبت باشد متحدالجهت و اگر m منفی باشد مختلف‌الجهت باشند.

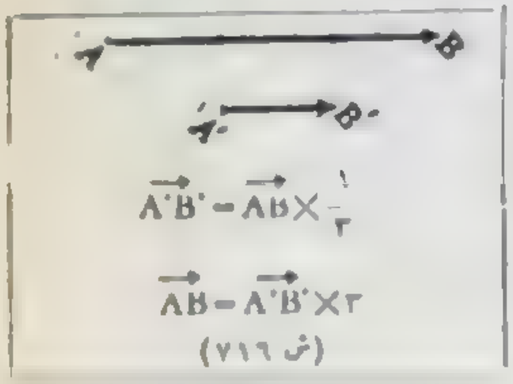
گاهی بجای آنکه بگویند حاصلضرب حامل $\overrightarrow{AB}$ و عدد جبری m میگویند حاصلضرب حامل $\overrightarrow{AB}$ درعدد جبری m و یا حاصلضرب عددجبری m درحامل $\overrightarrow{AB}$ ، برای رساندن آنکه حامل $\overrightarrow{A'B'}$ حاصلضرب حامل $\overrightarrow{AB}$ و عدد جبری m است مینویسند

$$\overrightarrow{A'B'} = m \times \overrightarrow{AB} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB} \times m$$

اگر m صفر باشد حامل $\overrightarrow{A'B'}$ صفر است

برعکس هرگاه دوحامل $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{A'B'}$ راکه راستاشان یکی باشد در نظر بگیریم واضح است که میتوان* عددی جبری مانند m میتوان یافت بقسمیکه داشته باشیم:

$$\overrightarrow{A'B'} = m \times \overrightarrow{AB}$$



(ش ۷۱۶)

اگر $m = -1$ باشد دوحامل $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{A'B'}$ متقابل خواهند بود و

در اینصورت $\boxed{\overrightarrow{A'B'} = -\overrightarrow{AB}}$

اگر $m = 1$ باشد دو حامل $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{A'B'}$ همسنگ خواهند بود

---

* بشرط آنکه $\overrightarrow{AB}$ صفر نباشد

۹۱۵ - حامل واحد یك محور - هرحاملی را که روی محور $x'x$ (یا روی محوری موازی با $x'x$ و متحدالجهت با آن) واقع باشد و اندازهٔ جبریش مساوی با $+1$ باشد حامل واحد محور $x'x$ مینامند.

(ش ۷۱۷)

اگر $\vec{U}$ یك حامل واحدمحور $x'x$ باشد وحامل $\overrightarrow{AB}$ راکه محملش برمحور $x'x$ منطبق و یا با آن موازیست درنظر بگیریم و اندازهٔ جبری حامل $\overrightarrow{AB}$ را روی محور $x'x$ عدد m بنامیم (ش ۷۱۷) نظر بآنچه گذشت داریم:

$$\overrightarrow{AB} = m \times \vec{U}$$

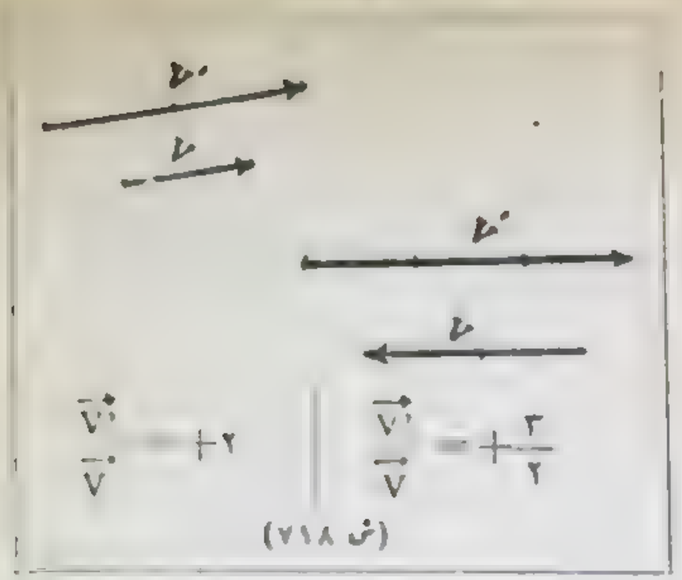
۹۱۶ - نسبت دوحامل - اگر حامل $\vec{V'}$ حاصلضرب حامل $\vec{V}$ و عدد جبری m باشد m را نسبت حامل $\vec{V'}$ بحامل $\vec{V}$ مینامند و مینویسند:

$$\frac{\vec{V'}}{\vec{V}} = m$$

ومیتوان گفت: **هرگاه محملهای دوحامل $\vec{V}$ و $\vec{V'}$ متوازی ویا برهم منطبق باشند نسبت حامل $\vec{V'}$ بحامل $\vec{V}$ عددیست جبری که قدرمطلق آن مساویست بانسبت طول حامل $\vec{V'}$ بطول حامل $\vec{V}$ و علامت آن + یا - است برحسب آنکه دو حامل مزبور متحدالجهت و یا مختلف‌الجهت باشند (ش ۷۱۸)**

مثلا نسبت دوحامل همسنگ $+1$ و نسبت دوحامل متقابل -1 است

تبصرهٔ ۱ - باید متوجه بود که فقط در صورتی میتوان از نسبت دو حامل گفتگو کرد که محملهای آن دوحامل یا موازی و یا برهم منطبق



(ش ۷۱۸)

باشند ـ اگر بجای هریك از حاملهای $\vec{V}$ و $\vec{V'}$ حاملی همسنگ با آن اختیار کنیم نسبت آنها تغییری نخواهد کرد.

تبصرهٔ ۲ ـ از آنچه گذشت نتیجه میشود که دو تساوی

$$\boxed{\frac{\vec{V'}}{\vec{V}} = m} \quad \text{و} \quad \boxed{\vec{V'} = m \times \vec{V}}$$

که در آنها m یك عدد جبریست باهم معادل هستند ومعنی آنها اینست که:

اولا محملهای حاملهای $\vec{V}$ و $\vec{V'}$ با هم موازی و یا برهم منطبق هستند

ثانیاً نسبت طول حامل $\vec{V'}$ بطول حامل $\vec{V}$ مساویست با قدرمطلق m

ثالثاً اگر m مثبت باشد حاملهای $\vec{V}$ و $\vec{V'}$ متحدالجهت هستند و اگر m منفی باشد دوحامل مزبور مختلف‌الجهت میباشند

۹۱۷ ـ اگر محملهای دوحامل $\vec{AB}$ و $\vec{CD}$ باهم موازی و یا برهم منطبق باشند و روی این دومحمل موازی یك جهت مثبت مشترك اختیار کنیم نسبت حامل $\vec{AB}$ بحامل $\vec{CD}$ مساویست با نسبت اندازهٔ جبری

حامل $\vec{AB}$ باندازهٔ جبری حامل $\vec{CD}$. یعنی

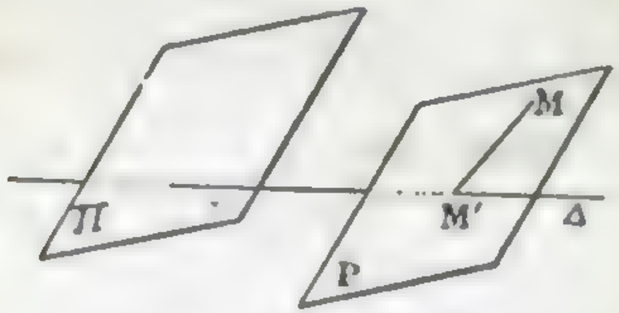
$$\frac{\vec{AB}}{\vec{CD}} = \frac{AB}{CD}$$

درواقع قدرمطلق هریك ازاین دونسبت مساویست با $\frac{AB}{CD}$ وعلامت هردوی آنها اگر دو حامل متحدالجهت باشند + و اگر مختلف‌الجهت باشند − است.

۲ ـ تصویر روی یك خط راست

۹۱۸ ـ تعریف ـ خط‌راست Δ وصفحهٔ π را که باخط Δ موازی نیست در نظر میگیریم

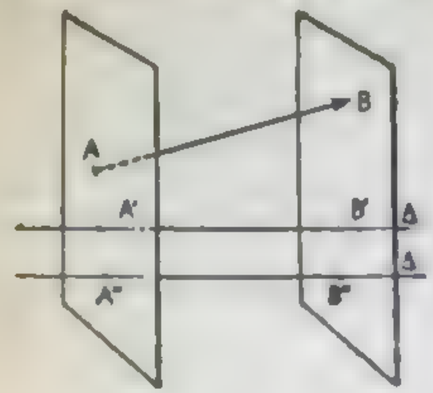
تصویر هرنقطه مانند M از فضا روی خط Δ و بموازات صفحهٔ π عبارتست‌از فصل‌مشترك خط Δ باصفحهٔ P که از نقطهٔ M بموازات صفحهٔ π رسم شود. در حالت خاصی که صفحهٔ π برخط D عمود باشد تصویر را **قائم** مینامند.



(ش ۷۱۹)

درشکل ۷۱۹ نقطهٔ M' تصویر نقطهٔ M روی خط Δ و بموازات صفحهٔ π است ـ صفحهٔ P را **صفحهٔ مصور نقطهٔ M** مینامند ـ اگر نقطهٔ M درصفحهٔ π واقع باشد صفحهٔ مصورش همان صفحهٔ π خواهد بود ـ هر نقطهٔ M از فضا یك تصویر روی خط Δ (بموازات صفحهٔ π) دارد و اگر نقطهٔ M روی خط Δ واقع باشد تصویرش بر خودش منطبق است ـ اگر یك نقطه مانند M' روی خط Δ در نظر بگیریم تصویر جمیع نقاط صفحهٔ P که از نقطهٔ M' بموازات صفحهٔ π رسم شود برنقطهٔ M' منطبق خواهند بود

تصویر هر حامل مانند $\overrightarrow{AB}$ عبارتست از حامل $\overrightarrow{A'B'}$ که مبدأ و منتهایش بترتیب تصاویر مبدأ و منتهای حامل $\overrightarrow{AB}$ باشند (ش ۷۲۰)



(ش ۷۲۰)

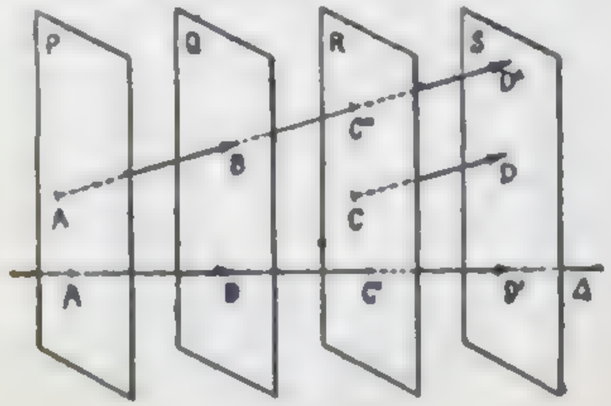
اگر حامل $\overrightarrow{AB}$ با خط L موازی باشد تصویرش با خودش همسنگ است.

برای آنکه تصویر یك حامل صفر باشد لازم و کافیست که آن حامل صفر و یا موازی با صفحهٔ π باشد.

واضح است که تصاویر یك حامل روی دو خط متوازی Δ و Δ_1 بموازات یك صفحه دو حامل همسنگ هستند (ش ۷۲۰)

۹۱۹ - قضیه - اگر محملهای دو حامل $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ باهم موازی یا برهم منطبق باشند نسبت تصویر حامل $\overrightarrow{AB}$ بتصویر حامل $\overrightarrow{CD}$ مساویست بانسبت حامل $\overrightarrow{AB}$ بحامل $\overrightarrow{CD}$.

میدانیم که نسبت $\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}}$ عددیست جبری که قدر مطلقش $\frac{AB}{CD}$ و علامتش + یا − است برحسب آنکه دو حامل $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ متحدالجهت



(ش ۷۲۱)

و یا مختلف‌الجهت باشند. صفحات P و Q و R و S که بترتیب از نقاط A و B و C و D بموازات صفحهٔ π بگذرند خط L را در نقاط A' و B' و C' و D' قطع میکنند. فصل‌مشترك خط راست AB را باصفحات R و S نقاط C'' و D'' مینامیم (ش ۷۲۱) واضح است که $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{C''D''}$ و نظر بقضیهٔ طالس در فضا (شمارهٔ ٥٦٤ مقالهٔ پنجم) داریم:

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}}=\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{C''D''}}=\frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{C'D'}}$$

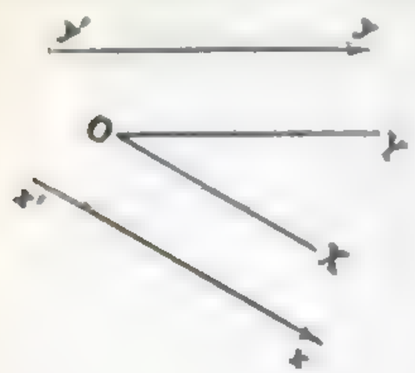
و قضیه ثابت است.

۹۲۰ - نتیجه - اگر $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ همسنگ باشند حاملهای $\overrightarrow{A'B'}$ و $\overrightarrow{C'D'}$ نیز همسنگ خواهند بود یعنی:

اگر دو حامل همسنگ را روی یك خط تصویر کنیم دو حامل متساوی بدست میآید.

اندازهٔ جبری تصویر قائم یك حامل روی یك محور.

۹۲۱ - تعریف - دو محور $x'x$ و $y'y$ را در فضا درنظر میگیریم و از نقطهٔ دلخواهی مانند O دو نیم‌خط OX و OY را بترتیب موازی و متحدالجهت با $x'x$ رسم میکنیم (ش ۷۲۲) اندازهٔ زاویهٔ محدب XOY بستگی بموضع نقطهٔ O ندارد (شمارهٔ ٥٤٠ مقالهٔ پنجم)



(ش ۷۲۲)

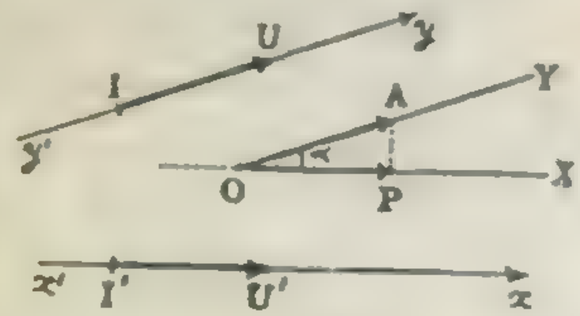
زاویهٔ محدب XOY را زاویهٔ دو محور $x'x$ و $y'y$ مینامند

گاهی زاویهٔ دو محور $x'x$ و $y'y$ را باعلامت قراردادی ($x'x$ و $y'y$) یا ($y'y$ و $x'x$) نشان میدهند.

۹۲۲ - قضیه - دو محور $x'x$ و $y'y$ را در فضا در نظر میگیریم. اگر $\overrightarrow{IU}$ یك حامل واحد محور $y'y$ باشد اندازهٔ

جبری تصویر قائم☼ حامل $\overrightarrow{IU}$ روی محور x'x مساویست با کسینوس زاویهٔ دو محور.

از نقطهٔ دلخواه O دو نیم‌خط OX و OY را بترتیب موازی و متحدالجهت بامحورهای x'x و y'y رسم ونقطهٔ A را بفاصلهٔ $OA=1$ روی OY اختیار میکنیم. حامل $\overrightarrow{OA}$ همسنگ حامل $\overrightarrow{IU}$ است و تصویر



(ش ۷۲۳)

قائم حامل $\overrightarrow{OA}$ روی خط OX همسنگ با تصویر حامل $\overrightarrow{IU}$ روی خط x'x میباشد و اگر تصویر حامل $\overrightarrow{IU}$ را روی x'x حامل $\overrightarrow{I'U'}$ و تصویر نقطهٔ A را روی خط OX نقطهٔ P بنامیم نظر بتعریف کسینوس داریم

$$OP=\cos\widehat{XOY}$$

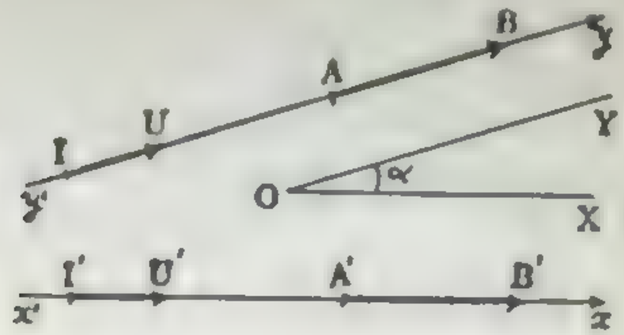
$\overline{OP}$ اندازهٔ جبری حامل $\overrightarrow{OP}$ روی محور x'x است

وچون $\overline{I'U'}=\overline{OP}$ پس $\overline{I'U'}=\cos XOY$ و قضیه ثابت است

۹۲۳ - قضیه - دو محور x'x و y'y را در فضا در نظر میگیریم. اگر حامل $\overrightarrow{AB}$ برمحور y'y واقع باشد اندازهٔ جبری تصویر قائم حامل $\overrightarrow{AB}$ روی‌محور x'x مساویست با حاصلضرب اندازهٔ جبری حامل $\overrightarrow{AB}$ روی محور y'y در کسینوس زاویهٔ دومحور.

☼ دقت کنید که این قضیه فقط درموردی صحیح است که تصویر قائم باشد

فرض میکنیم حامل $\overrightarrow{IU}$ یك‌حامل واحد محور y'y باشد و تصاویر قائم حاملهای $\overrightarrow{IU}$ و $\overrightarrow{AB}$ را برخط x'x بترتیب حاملهای $\overrightarrow{I'U'}$ و $\overrightarrow{A'B'}$



(ش ۷۲۴)

مبنامیم نظر بقضیهٔ ۹۱۹ داریم:

$$\overrightarrow{AB} \quad \overrightarrow{A'B'}$$
$$\overrightarrow{IU} \quad \overrightarrow{I'U'}$$

و نظر بشمارهٔ ۹۱۷ رابطهٔ فوق را میتوان چنین نوشت

$$AB \quad A'B'$$
$$IU \quad I'U'$$

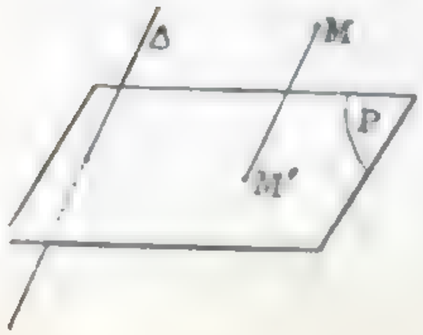
ما $\overline{IU}=1$ و اگر زاویهٔ دومحور x'x و y'y را α بنامیم

$$\overline{I'U'}=\cos\alpha \qquad \text{(شمارهٔ ۹۲۲)}$$

بنابراین

$$\boxed{\overline{A'B'}=\overline{AB}\cos\alpha}$$

۳ - تصویر روی یك صفحه



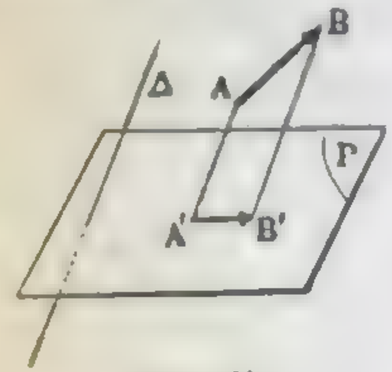
(ش ۷۲۵)

۹۲۴ - تعریف - خط راست Δ وصفحهٔ P را که، خط Δ موازی نیست درنظر میگیریم

تصویر هر نقطه مانند M ازفضا روی صفحهٔ P و بموازات خط Δ

عبارتست از فصل مشترک صفحهٔ P با خطی که از نقطهٔ M بموازات خط Δ رسم شود. درحالت خاصی که خط Δ بر صفحهٔ P عمود باشد تصویر را قائم مینامند.

در شکل ۷۲۵ نقطهٔ M' تصویر نقطهٔ M روی صفحهٔ P و بموازات خط Δ است ـ خط راست MM' را **خط مصور نقطهٔ M** مینامند ـ اگر نقطهٔ M روی خط Δ واقع باشد خط مصورش همان خط Δ خواهد بود ـ هر نقطهٔ M از فضا یك تصویر روی صفحهٔ P (بموازات خط Δ) دارد و اگر نقطهٔ M درصفحهٔ P واقع باشد تصویرش بر خودش منطبق است ـ اگر یك نقطه مانند M' روی صفحهٔ P درنظر بگیریم تصاویر جمیع نقاط خطی که ازنقطهٔ M' بموازات خط Δ رسم شود برنقطهٔ M' منطبق خواهند بود.



(ش ۷۲۶)

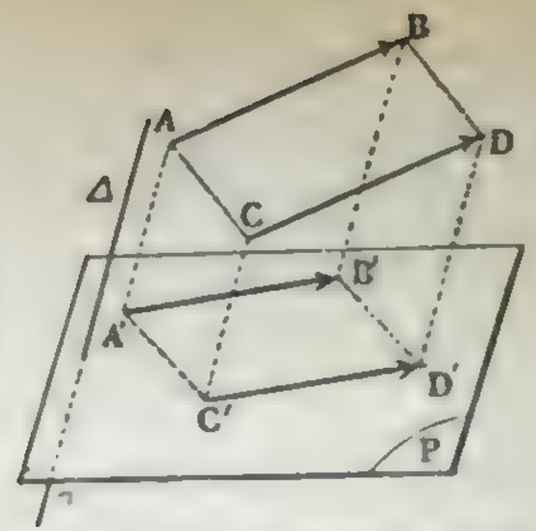
تصویر هر حامل مانند $\overrightarrow{AB}$ عبارتست از حامل $\overrightarrow{A'B'}$ که مبدأ و منتهایش بترتیب تصاویر مبدأ و منتهای حامل $\overrightarrow{AB}$ باشد (ش ۷۲۶)ـ صفحهٔ ABB'A' را صفحهٔ مصور حامل $\overrightarrow{AB}$ میگویند ـ اگر حامل $\overrightarrow{AB}$ باصفحهٔ P موازی باشد تصویرش باخودش همسنگ است

برای آنکه تصویر یك حامل برصفحهٔ P صفر باشد لازم و کافیست که آن حامل صفر ویا موازی باخط Δ باشد.

واضح است که تصاویر یك حامل بموازات یك خط روی دوصفحهٔ موازی حاملهای همسنگ هستند.

۹۲۵ ـ قضیه ـ تصاویر دوحامل همسنگ روی یك صفحه و بموازات یك خط دو حامل همسنگ هستند.

دوحامل همسنگ $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ را درنظر میگیریم وتصاویر آنهارا روی صفحهٔ P و بموازات خط Δ بترتیب حاملهای $\overrightarrow{A'B'}$ و $\overrightarrow{C'D'}$ مینامیم. شکل ABDC موازی الاضلاع است و صفحات مصور ABA'B' و CDC'D' یا باهم موازی ویا برهم منطبق هستند.



(ش ۷۲۷)

درحالت اول صفحات ACA'C' و BDB'D' برهم موازی هستند و شکل A'B'D'C' متوازی‌الاضلاع است و لذا حاملهای $\overrightarrow{A'B'}$ و $\overrightarrow{C'D'}$ همسنگ هستند.

درحالت دوم یعنی درصورتیکه صفحات مصور ABA'B' و CDC'D' برهم منطبق باشند اگر حاملی مانند $\overrightarrow{EF}$ درنظر بگیریم که با حاملهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ همسنگ باشد ولی صفحهٔ مصورش بر صفحات مزبور منطبق نباشد و تصویر حامل $\overrightarrow{EF}$ را حامل $\overrightarrow{E'F'}$ بنامیم بنظر بحالت اول داریم

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{E'F'} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{C'D'} = \overrightarrow{E'F'}$$

و بنابراین دوحامل $\overrightarrow{A'B'}$ و $\overrightarrow{C'D'}$ که هردو بحامل مثل $\overrightarrow{E'F'}$ همسنگ هستند خودشان همسنگ میباشند.

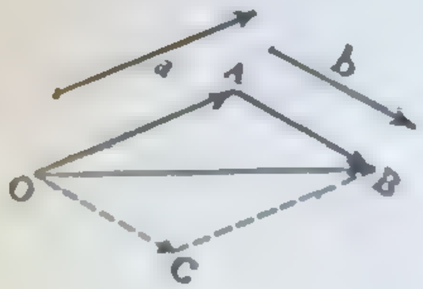
٤ ـ مجموع هندسی چند حامل

۹۲۶ ـ مجموع هندسی دوحامل ـ دوحامل $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را در فضا درنظر میگیریم و $\vec{a}$ را حامل اول و $\vec{b}$ را حامل دوم مینامیم ٭

٭ یعنی برای دوحامل ترتیب قائل میشویم.

و از نقطهٔ دلخواه O حامل $\overrightarrow{OA}$ را همسنگ باحامل اول و از نقطهٔ A حامل $\overrightarrow{AB}$ را همسنگ با حامل دوم اختیار میکنیم . حامل $\overrightarrow{OB}$ را مجموع هندسی حاملهای اول ودوم در نقطهٔ O مینامند (ش ۷۲۸) و مینویسند :

$$\overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b}$$



(ش ۷۲۸)

واضح است که اگر حاملهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مقابل باشند نقطهٔ B بر نقطهٔ O منطبق میشود یعنی مجموع دو حامل مقابل صفر است .

در تعریف فوق برای حاملهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ترتیب قائل شدیم وحامل $\vec{a}$ را بر حامل $\vec{b}$ مقدم داشتیم اکنون ثابت میکنیم که اگر حامل $\vec{b}$ را بر حامل $\vec{a}$ مقدم داریم و برای بدست آوردن مجموع ابتدا حامل $\overrightarrow{OC}$ را همسنگ با $\vec{b}$ و سپس از نقطهٔ C حاملی همسنگ با $\vec{a}$ رسم کنیم باز همان حامل $\overrightarrow{OB}$ بدست خواهد آمد

درواقع چون حاملهای $\overrightarrow{OC}$ و $\overrightarrow{AB}$ هردو باحامل $\vec{b}$ همسنگ هستند خودشان همسنگ میباشند ولذا حامل $\overrightarrow{CB}$ باحامل $\overrightarrow{OA}$ و بنابراین با $\vec{a}$ همسنگ است (شمارهٔ ۹۱۱) و داریم

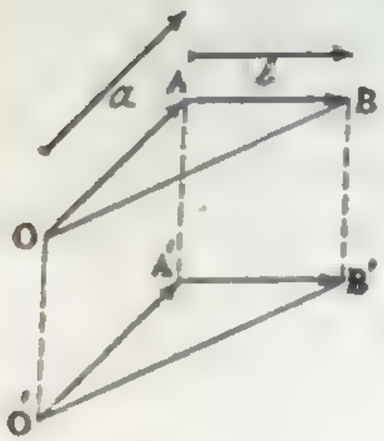
$\overrightarrow{OB} = \vec{b} + \vec{a}$ پس میتوان نوشت $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

یعنی : مجموع دوحامل بترتیبی که آنها را یکی پس از دیگری اختیار میکنیم بستگی ندارد و میتوان حامل OB را بدون قید ترتیب مجموع هندسی حاملهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ نامید

مجموع هندسی دوحامل دارای خاصیتهای زیر میباشد :

الف ـ اگر بجای دوحامل حاملهای همسنگ با آنها اختیار کنیم در مجموع این دو حامل تغییری حاصل نمیشود .

ب ـ درتعریف مجموع دو حامل نقطهٔ O را بطور دلخواه اختیار کردیم . اکنون ثابت میکنیم که اگر بجای O نقطهٔ دیگری مانند O' اختیار کنیم مجموع هندسی حاملهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در نقطهٔ O' بمجموع هندسی آنها در نقطهٔ O همسنگ است.



(ش ۷۲۹)

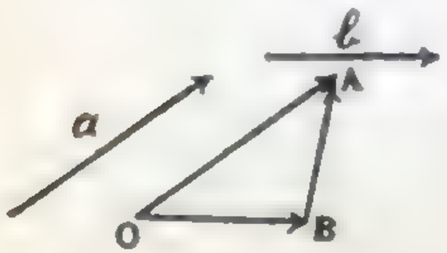
اگر $\overrightarrow{O'B'}$ مجموع حاملهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در نقطهٔ O' باشد (ش۷۲۹) داریم :

$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{O'A'} = \vec{a}$ پس دو حامل $\overrightarrow{OO'}$ و $\overrightarrow{AA'}$ همسنگ هستند (شمارهٔ ۹۱۱) و همچنین داریم :

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} = \vec{b}$ پس دو حامل $\overrightarrow{AA'}$ و $\overrightarrow{BB'}$ همسنگ میباشند

ولذا $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{BB'}$ و در نتیجه دو حامل $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{O'B'}$ همسنگ هستند (شمارهٔ ۹۱۱)

۹۲۷ ـ فضل هندسی یك حامل بر حامل دیگر ـ دو حامل $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را در نظر گرفته از نقطهٔ اختیاری O حاملهای $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ را بترتیب همسنگ با آنها اختیار میکنیم (ش ۷۳۰) نظر بتعریف مجموع هندسی دوحامل داریم :



(ش ۷۳۰)

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA}$$

وچون $\overrightarrow{BO} = -\overrightarrow{OB}$

پس داریم :

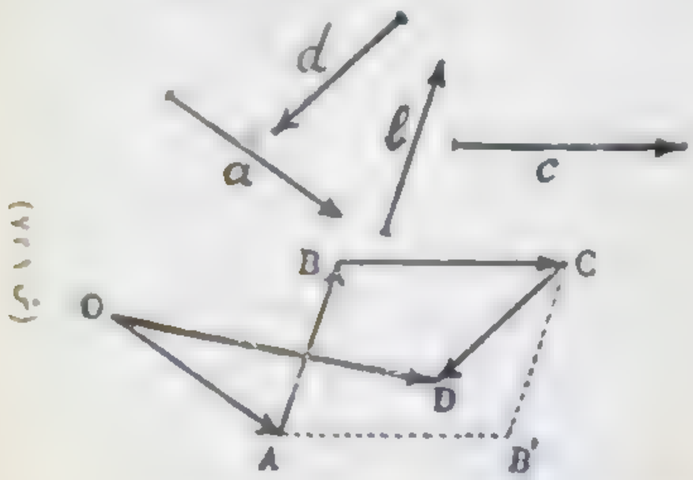
$$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}+(-\overrightarrow{OB})=\vec{a}+(-\vec{b})=\vec{a}-\vec{b}$$

حامل $\overrightarrow{BA}$ را که از افزودن حامل مقابل $\vec{b}$ بحامل $\vec{a}$ بدست میآید حاصل حامل $\vec{a}$ برحامل $\vec{b}$ مینامند

۹۲۸ - مجموع هندسی چند حامل - حاملهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ و $\vec{d}$ را درفضا درنظر میگیریم و آنها را بترتیب حامل اول و دوم و سوم و چهارم مینامیم* و از نقطهٔ دلخواهی مانند O حاملهای $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{CD}$ را بترتیب همسنگ باحاملهای اول ودوم وسوم وچهارم اختیار میکنیم. حامل $\overrightarrow{OD}$ را مجموع هندسی حاملهای اول ودوم وسوم وچهارم مینامند ومینویسند:

$$\overrightarrow{OD}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$$

اگر نقطهٔ D بر نقطهٔ O منطبق شود مجموع صفر است .



(ش ۷۳۰)

در مرسوم برای حاملهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ و $\vec{d}$ ترتیب قائل شدیم اکنون ثابت میکنیم که اگر این ترتیب را مراعات نکنیم باز همان حامل

* یعنی برای حاملهای مفروض ترتیب قائل میشویم

$\overrightarrow{OD}$ بدست خواهد آمد

در واقع بدون آنکه در مجموع تغییری حاصل شود میتوانیم بجای دوحامل متوالی مجموع آنها را قرار دهیم :

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{b}+\vec{c}$$

ومیتوانیم بجای $\overrightarrow{AC}$ مجموع $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{c}+\vec{b}$ راقرار دهیم (ش۷۳۱)

پس : $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\vec{a}+\vec{c}+\vec{b}+\vec{d}$

بنابراین بدون آنکه در مجموع تغییری حاصل شود میتوان ترتیب دوحامل متوالی را تغییر داد و واضح است که باتغییر دادن ترتیب حاملهای مجاور میتوانیم حاملها را بهرترتیبی که بخواهیم باهم جمع کنیم وهمواره مجموع همان حامل $\overrightarrow{OD}$ خواهد بود. یعنی مجموع چند حامل بترتیبی که آنها را بکی پس از دیگری اختیار میکنیم بستگی ندارد و عنوان جمع

$\overrightarrow{OD}$ را بدون قید ترتیب مجموع هندسی حاملهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ و $\vec{d}$ نامید.

مجموع هندسی چند حامل دارای خاصیتهای زیر میباشد :

الف - اگر بجای چند حامل حاملهایی همسنگ با آنها اختیار کنیم در مجموع آن چند حامل تغییری حاصل نمیشود .

ب - اگر بجای نقطهٔ O نقطهٔ دیگری مانند 'O اختیار کنیم مجموع آن چند حامل در نقطهٔ O با مجموع آنها در نقطهٔ 'O همسنگ است (استدلال مانند استدلالی است که در مورد مجموع دوحامل بیان کردیم)

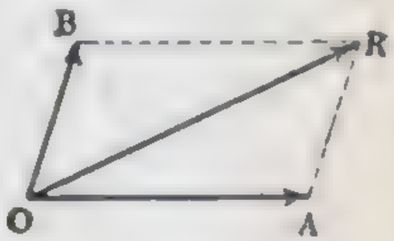
ج - برای بدست آوردن مجموع هندسی چندین حامل میتوان بجای دو یا چندتا از آنها مجموعشان را قرار داد. درواقع کافیست این چندحامل را درمراتب اول قراردهیم وتعریف مجموع هندسی چند حامل را بکاربریم.

تمرین - ثابت کنید که اگر چند حامل را در یک عدد جبری ضرب کنیم مجموع آنها درهمان عدد ضرب میشود.

۹۲۹ - حالات خاص - منتجهٔ چند حامل که مبدأشان مشترک باشد .

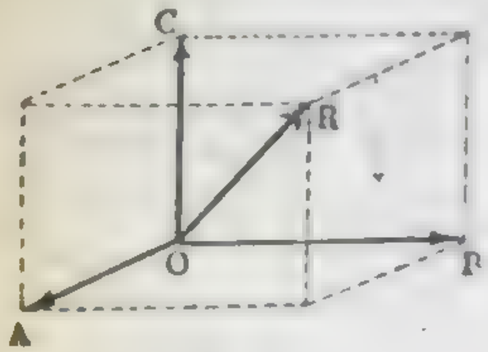
اگر چندحامل درمبدأ O مشترک باشند و مجموع هندسی آنها را درنقطهٔ O حامل $\overrightarrow{OR}$ بنامیم میگویند که حامل $\overrightarrow{OR}$ منتجهٔ حاملهای مزبور است . مثلا :

منتجهٔ دو حامل $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ عبارتست از قطر متوازی‌الاضلاعی که دو ضلعش OA و OB باشند (ش ۷۳۲)



$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$

(ش ۷۳۲)



$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

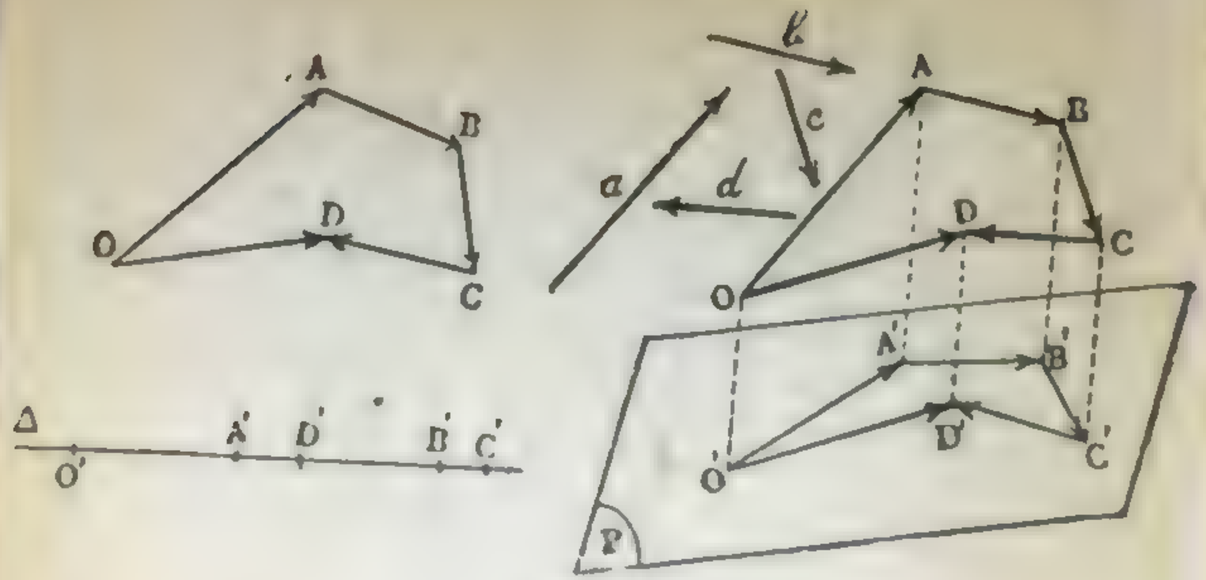
(ش ۷۳۳)

منتجهٔ سه حامل $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{OC}$ که در یک‌صفحه واقع نباشند قطرمتوازی‌السطوحی‌است که سه‌یالش OA و OB و OC باشند (ش ۷۳۳)

قضیهٔ تصاویر

۹۳۰ - قضیه - هرگاه چند حامل و مجموع هندسی آنها را روی یک خط بموازات یک صفحه (یا روی یک صفحه بموازات یک‌خط) تصویر کنیم تصویر مجموع هندسی عبارتست ازمجموع هندسی تصاویر آن حاملها.

این قضیه از تعریف مجموع هندسی چند حامل نتیجه میشود :



(ش ۷۳۴)

درواقع اگر حاملهای $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{OC}$ و $\overrightarrow{OD}$ را بترتیب همرنگ باحاملهای مفروض $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ و $\vec{d}$ اختیار کنیم حامل $\overrightarrow{OD}$ مجموع هندسی حاملهای مفروض‌است واگر تصاویر نقاط O و A و B و C و D را روی خط Δ (یا روی صفحهٔ P) بترتیب نقاط O' و A' و B' و C' و D' بنامیم از تساوی هندسی :

$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$$

تساوی هندسی زیر نتیجه میشود

$$\overrightarrow{O'D'}=\overrightarrow{O'A'}+\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{C'D'}$$

۹۳۱ - نتیجهٔ مهم☆ - اندازهٔ جبری تصویر مجموع هندسی چندحامل روی یک‌محور مساویست بامجموع اندازه‌های جبری تصاویر حاملهای مزبور .

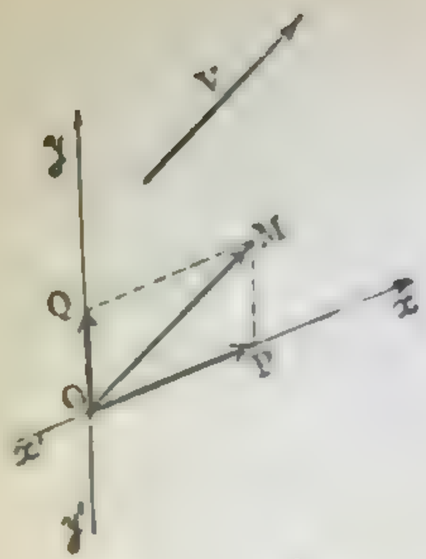
زیرا اگر روی خط Δ یک جهت مثبت اختیار کنیم (ش ۷۳۴) داریم

$$\overline{O'D'}=\overline{O'A'}+\overline{A'B'}+\overline{B'C'}+\overline{C'D'}$$ (رابطهٔ شال)

☆ این نتیجه که موارد استعمال زیاد دارد ، قضیهٔ تصاویر مردوست

دستگاههای محورهای مختصات

۹۲۲ - مختصات یك نقطه [illegible] در یك صفحه دو محور متعامد [illegible] $x'Ox$ و $y'Oy$ و [illegible] صفحه [illegible] M [illegible] M [illegible] موازات $y'y$ و $x'x$ رسم میکنیم تا اولی محور $x'x$ را در نقطه‌ای مانند P و دومی محور $y'y$ را در نقطه‌ای مانند Q قطع کند (ش ۷۳۵)



(ش ۷۳۵)

اندازهٔ جبری حامل $\overrightarrow{OP}$ را روی محور $x'x$ **طول نقطهٔ M** و اندازهٔ جبری حامل $\overrightarrow{OQ}$ را روی محور $y'y$ **عرض نقطهٔ M** مینامند و معمولا طول یك نقطه را باحرف x و عرض آنرا با حرف y مینمایانند:

$$\overline{OP}=x \qquad \text{و} \qquad OQ=y$$

بنابراین بازای هر نقطه مانند M از صفحهٔ دو محور $x'x$ و $y'y$ دستگاه دو عدد جبری $x=\overline{OP}$ و $y=\overline{OQ}$ بدست میآید.

برعکس هر گاه دوعددجبری مانند x و y را درنظر بگیریم، روی محور $x'x$ یك نقطه مانند P میتوان یافت بقسمیکه $\overline{OP}$ مساوی با x باشد [illegible] محور $y'y$ یك نقطه [illegible] Q [illegible] Q مساوی با y باشد [illegible] P و Q [illegible] موازات $y'y$ و $x'x$ رسم شوند در یك نقطه مانند M یکدیگر را قطع میکنند که طولش x و عرضش y میباشد. بنابراین بازای هردستگاه دوعدد جبری x و y یك نقطه مانند M از صفحهٔ دومحور مشخص میشود.

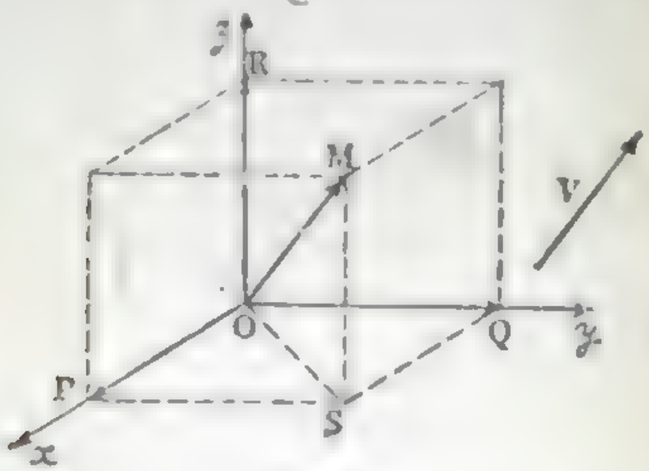
مجموعهٔ طول و عرض هر نقطه را در دستگاه محورهای Oxy مختصات آن نقطه دراین دستگاه مینامند. محور $x'x$ محور طولها و محور $y'y$ محور عرضها نامیده میشوند.

هر گاه دومحور $x'Ox$ و $y'Oy$ برهم عمودباشند مختصات نقطه را **قائم** میگویند.

۹۲۳ - مؤلفه‌های جبری یك حامل در یك صفحه - حامل $\vec{V}$ را در صفحهٔ xOy در نظر میگیریم و از مبدأ O حامل $\overrightarrow{OM}$ را همسنگ آن رسم میکنیم (ش ۷۳۵) ومختصات نقطهٔ M را دردستگاه‌محورهای xOy اعداد a و b مینامیم: $a=\overline{OP}$ و $b=\overline{OQ}$

اعداد جبری a و b را **مؤلفه‌های جبری حامل $\vec{V}$** یاهرحاملی که با $\vec{V}$ همسنگ باشد میگویند - با معلوم بودن اعداد جبری a و b حامل آزاد V مشخص میشود.

۹۲۴ - مختصات یك نقطه درفضا - سه محور متعارف $x'Ox$ و $y'Oy$ و $z'Oz$ راکه در یك‌صفحه واقع‌نباشند درنظر میگیریم و نقطه‌ای



(ش ۷۳۶)

مانند M در فضا اختیارمیکنیم وتصویر نقطهٔ M را موازات صفحهٔ yOz روی خط $x'x$ نقطهٔ P و تصویر M را موازات صفحهٔ xOz روی خط $y'y$ نقطهٔ Q و بالاخره تصویر M را موازات صفحهٔ xOy روی‌خط $z'z$ نقطهٔ R مینامیم (ش ۷۳۶)

اندازهٔ جبری حامل $\overrightarrow{OP}$ را روی محور $x'x$ **طول نقطهٔ M** و اندازهٔ جبری حامل $\overrightarrow{OQ}$ را روی محور $y'y$ **عرض نقطهٔ M** و اندازهٔ جبری حامل $\overrightarrow{OR}$ را روی محور $z'z$ **ارتفاع نقطهٔ M** مینامند و معمولا

طول وعرض و ارتفاع یك نقطه‌را [illegible] حروف x و y و z [illegible]

$\overline{OP}=x$ و $OQ=y$ و z [illegible] R

بنابراین بازای هر نقطه مانند M از فضا سه عدد جبری $x=OP$ و $y=OQ$ و $z=OR$ بدست میآید

برعکس هرگاه سه‌عددجبری مانند x و y و z درنظربگیریم روی محور x'x یك‌نقطه مانند P و روی محور y'y یك نقطه مانند Q و روی محور z'z یك‌نقطه مانند R میتوان یافت بقسمیکه داشته‌باشیم:

$\overline{OP}=x$ $\qquad OQ=y$ $\qquad OR=z$

اگر ازنقاط P و Q دوخط بترتیب بموازات y'y و x'x رسم کنیم این دوخط یکدیگر را درصفحهٔ xOy در نقطه‌ای مانند S قطع میکنند و صفحه‌ای که از نقطهٔ R بموازات صفحهٔ xOy بگذرد خطی را که از S بموازات z'z رسم شود درنقطه‌ای مانند M قطع میکند که طولش x و عرضش y وارتفاعش z میباشد. بنابراین بازای‌هردستگاه سه‌عددی‌جبری x و y و z [illegible] M [illegible]

مجموعهٔ طول و عرض و ارتفاع هر نقطه را در دستگاه Oxyz مختصات آن‌نقطه دراین‌دستگاه مینامند محور x'x محور طولها و محور y'y محور عرضها و محور z'z محور ارتفاعات نامیده میشود.

هر [illegible] O_x و O_y و O_z [illegible] مختصات نقطه را قائم میگویند.

۹۴۵ ـ مؤلفه‌های جبری یك‌حامل درفضا ـ حامل $\vec{V}$ را در [illegible] O [illegible] OM را همسنگ با آن رسم‌میکنیم (ش ۷۳) ومختصات نقطهٔ M را [illegible] O_x و O_y و O_z [illegible] مینامیم:

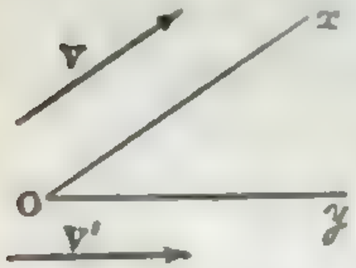
$a=OP$ $\qquad b=OQ$ $\qquad c=OR$

[illegible] a و b و c را **مؤلفه‌های جبری حامل V** یا هرحاملی که با V همسنگ باشد مینامند ـ بامعلوم بودن اعداد جبری a و b و c حامل آزاد V مشخص میشود.

۵ ـ حاصلضرب عددی دوحامل

۹۴۶ ـ تعریف ـ حاصلضرب‌عددی دوحامل آزاد عبارتست از حاصلضرب طولهای آن دوحامل درکسینوس زاویه‌شان.

توضیح ـ دوحامل $\vec{V}$ و $\vec{V'}$ را درنظرمیگیریم وازنقطهٔ دلخواه O دو [illegible] Ox و Oy را بترتیب‌موازی ومتحدالجهت با آنها رسم میکنیم. زاویهٔ محدب xOy را زاویهٔ دو حامل $\vec{V}$ و $\vec{V'}$ [illegible] را با علامت قراردادی (V و V') مینمایانند].



(ش ۷۳۷)

حاصلضرب عددی دوحامل $\vec{V}$ و $\vec{V'}$ را با علامت قراردادی $\vec{V}\cdot\vec{V'}$ مینمایانند. بنابراین:

$$\vec{V}\cdot\vec{V'}=V\times V'\times\cos(\vec{V}\ \text{و}\ \vec{V'})$$

[illegible] $\vec{V}\cdot\vec{V'}$ [illegible] و [illegible] یك [illegible]

۹۴۷ ـ نتیجه ـ اولاً ـ حاصلضرب عددی دو حامل [illegible] آنها بستگی ندارد

$$\vec{V}\cdot\vec{V'}=\vec{V'}\cdot\vec{V}$$

ثانیاً برحسب [illegible] عددی آنها [illegible] دوحامل [illegible] برهم عمود باشند حاصلضرب عددی آنها صفر است

ثالثاً اگردوحامل همسنگ باشند حاصلضرب عددی آنها مساوی است با مربع طول مشترکشان و دراینصورت حاصلضرب را مربع عددی هریك ازآن حاملها مینامند و مینویسند

$$\vec{V}\cdot\vec{V}=(\vec{V})^2=V^2$$

رابعاً اگر طول هردو حامل مساوی با واحد باشد حاصلضرب عددی آنها مساویست با کسینوس زاویه‌شان.

خامساً اگر محملهای دوحامل باهم موازی یا برهم منطبق باشند و روی این دومحمل یك جهت مثبت اختیار کنیم حاصلضرب عددی دوحامل مساویست با حاصلضرب اندازه‌های جبری دوحامل روی محور حاصل وداریم:

$$\vec{V}\cdot\vec{V'}=\overline{V}\times\overline{V'}$$

۹۳۸ - قضیه - اگر یکی از دو حامل را دریك عدد جبری ضرب کنیم حاصلضرب عددی دوحامل درهمان عدد ضرب میشود.

اگر عدد جبری K مثبت باشد زاویهٔ دوحامل تغییر نمیکند ولی طول یکی از آنها K برابر میشود وبنابراین حاصلضرب عددی دو حامل هم در K ضرب میشود.

اگر عدد جبری K منفی باشد کسینوس زاویهٔ دو حامل تغییر علامت میدهد و طول یکی از آنها $|k|$ برابر میشود و بنابراین حاصلضرب عددی آنها درعدد جبری k ضرب میشود

این قضیه را میتوان با یکی از دوتساوی زیر تعبیر کرد:

$$\vec{V}\cdot(k\vec{V'})=k(\vec{V}\cdot\vec{V'}) \quad \text{یا} \quad (k\vec{V})\cdot\vec{V'}=k(\vec{V}\cdot\vec{V'})$$

۹۳۹ - نتیجهٔ ۱ - اگر دو حامل را در دوعدد جبری ضرب کنیم حاصلضرب عددی آنها در حاصلضرب آندو عدد جبری ضرب میشود زیرا:

$$(k\vec{V})\cdot(k'\vec{V'})=k[\vec{V}\cdot(k'\vec{V'})]=k[k'(\vec{V}\cdot\vec{V'})]=kk'(\vec{V}\cdot\vec{V'})$$

۹۴۰ - نتیجهٔ ۲ - اگردوحامل بادومحور موازی باشند حاصلضرب عددی آنها مساویست با حاصلضرب اندازه‌های جبری آنها در کسینوس زاویهٔ آندو محور

فرض میکنیم حامل $\vec{AB}$ باهمور $X'X$ و حامل $\vec{A'B'}$ باهمور $Y'Y$ موازی باشند وحامل واحد محور XX' را $\vec{u}$ و حامل واحد محور $Y'Y$

را $\vec{u'}$ مینامیم در اینصورت داریم

$$\vec{AB}=AB\times\vec{u} \quad \text{و} \quad \vec{A'B'}=A'B'\times\vec{u'}$$

از اینرو حاصل میشود

$$\vec{AB}\cdot\vec{A'B'}=\overline{AB}\times\overline{A'B'}(\vec{u}\cdot\vec{u'})=\overline{AB}\times\overline{A'B'}\times\cos(X'X \text{ و } Y'Y)$$

زیرا $\vec{u}\cdot\vec{u'}=\cos(X'X \text{ و } Y'Y)$ (شمارهٔ ۹۳۷ راجعاً)

۹۴۱ - قضیه - هرگاه محمل حامل $\vec{AB}$ بامحوری مانند $x'x$ موازی یا برآن منطبق باشد حاصلضرب عددی حامل $\vec{AB}$ در حامل دیگری مانند $\vec{A'B'}$ مساویست با حاصلضرب اندازهٔ جبری حامل $\vec{AB}$ روی محور $x'x$ دراندازهٔ جبری تصویرقائم حامل $\vec{A'B'}$ برمحور $x'x$

روی محمل حامل $\vec{A'B'}$ همان جهت حامل $\vec{A'B'}$ را جهت مثبت اختیار میکنیم و محور حاصل را $y'y$ مینامیم. نظر شمارهٔ ۹۴۰ داریم

$$\vec{AB}\cdot\vec{A'B'}=AB\times\overline{A'B'}\times\cos(x'x \text{ و } y'y)$$

اما $\overline{A'B'}\times\cos(x'x \text{ و } y'y)$ مساویست با اندازهٔ جبری تصویرقائم حامل $\vec{A'B'}$ برمحور $x'x$ (شمارهٔ ۹۲۳) و قضیه ثابت است

۹۴۲ - قضیه - برای بدست آوردن حاصلضرب عددی یك حامل مانند $\vec{U}$ درمجموع هندسی چند حامل مانند $\vec{V_1}+\vec{V_2}+\vec{V_3}$ کافیست حاصلضرب عددی حامل $\vec{U}$ را در هریك از حاملهای $\vec{V_1}$ و $\vec{V_2}$ و $\vec{V_3}$ بدست آوریم وحاصلها را باهم جمع جبری کنیم.

حاصلضرب عددی حامل $\vec{U}$ را در مجموع هندسی $\vec{V_1}+\vec{V_2}+\vec{V_3}$ عدد P مینامیم:

$$P=\vec{U}\cdot(\vec{V_1}+\vec{V_2}+\vec{V_3})$$

روی محمل حامل $\vec{U}$ یك جهت مثبت اختیار میکنیم و محور حامل را $x'x$ مینامیم دراینصورت طبق شمارهٔ ۹۴۱ عدد P مساویست با حاصلضرب اندازهٔ جبری حامل $\vec{U}$ در اندازهٔ جبری تصویر قائم مجموع هندسی $\vec{V_1}+\vec{V_2}+\vec{V_3}$ برمحور $x'x$ اما نظر بقضیهٔ تصاویر (شمارهٔ ۹۳۱) اندازهٔ جبری تصویر قائم مجموع هندسی $\vec{V_1}+\vec{V_2}+\vec{V_3}$ بر $x'x$ مساویست با مجموع اندازه‌های جبری تصاویر حاملهای $\vec{V_1}$ و $\vec{V_2}$ و $\vec{V_3}$ بر $x'x$ و اگر اندازه‌های جبری این تصاویر را بترتیب $\overline{V'_1}$ و $\overline{V'_2}$ و $\overline{V'_3}$ بنامیم داریم :

$$P=\overline{U}\times(\overline{V'_1}+\overline{V'_2}+\overline{V'_3})=\overline{U}\times\overline{V'_1}+\overline{U}\times\overline{V'_2}+\overline{U}\times\overline{V'_3}$$

ونظر بشمارهٔ ۹۴۱

$$P=\vec{U}\cdot\vec{V_1}+\vec{U}\cdot\vec{V_2}+\vec{U}\cdot\vec{V_3}$$

وقضیه ثابت است

۹۴۳ - اگر قضیهٔ فوقرا دو دفعهٔ متوالی بکار بریم نتیجه میشود که:

برای بدست‌آوردن حاصلضرب عددی دو مجموع هندسی کافیست حاصلضرب عددی هریك از حاملهای مجموع اول را درهریك از حاملهای مجموع‌دوم بدست آوریم و حاصلها را باهم جمع جبری کنیم .

$$(U_1+U_2)\cdot(V_1+V_2)=\vec{U_1}\cdot\vec{V_1}+\vec{U_1}\cdot\vec{V_2}+\vec{U_2}\cdot\vec{V_1}+\vec{U_2}\cdot\vec{V_2}$$

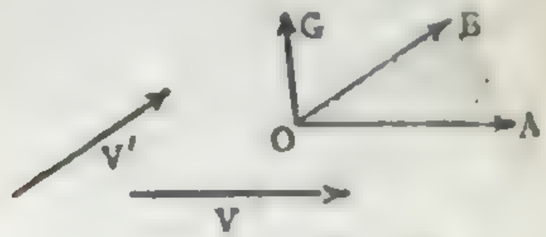
۶ - حاصلضرب عاملی دوحامل

۹۴۴ - تعریف - دو حامل آزاد $\vec{V}$ و $\vec{V'}$ را که محملهایشان برهم منطبق یا باهم موازی نیست درنظرمیگیریم وازنقطهٔ دلخواه O حاملهای $\vec{OA}$ و $\vec{OB}$ را بترتیب‌همسنگ باآنها رسم‌میکنیم (ش۷۳۸) **حاصلضرب عاملی حامل V درحامل V' حاملی است مانند $\vec{OG}$ که بطریق زیر بدست میآید :**

محمل حامل $\vec{OG}$ را برصفحهٔ AOB عمودا‌ختیارمیکنیم - جهت حامل $\vec{OG}$ را طوری اختیار میکنیم که کنج سه وجهی O.ABG مستقیم☆ باشد - طول حامل $\vec{OG}$ را مساوی با

$$V\times V'\sin(V \text{ و } V')$$

یعنی مساوی با دو برابر عددی که مساحت مثلث AOB را مینمایاند اختیار میکنیم .



(ش ۷۳۸)

حاصلضرب‌عاملی‌حامل $\vec{V}$ را درحامل $\vec{V'}$ باعلامت‌قراردادی $\vec{V}\wedge\vec{V'}$ مینمایانند . واضح است که اگر بجای نقطهٔ O نقطهٔ دیگری مانند O' اختیار کنیم حامل $\vec{O'G'}$ که با $\vec{OG}$ همسنگ است بدست میآید .

هریك از حاملهای $\vec{V}$ و $\vec{V'}$ را بیك‌عامل حاصلضرب عاملی مینامند.

۹۴۵ - نتیجه - اولا - حاصلضرب عاملی حامل $\vec{V'}$ در حامل $\vec{V}$ وحاصلضرب عاملی حامل $\vec{V}$ درحامل $\vec{V'}$ دوحامل متقابل هستند ودارید

$$\vec{V}\wedge\vec{V'}=-(\vec{V'}\wedge\vec{V})$$

ثانیاً حاصلضرب عاملی درصورتی صفر است که لااقل یکی از دو عامل آن صفر باشد یا دو عامل دارای یك راستای مشترك باشند .

☆ درشمارهٔ ۶۵۶ مقالهٔ پنجم دیدیم که اگر یالهای‌ازسه‌یال‌یك کنج سه‌وجهی S ABC مثلا SA را یال اول و یکی‌دیگر مثلا یال SB را یال دوم و بالاخره SC را یال سوم بنامیم و فرض‌کنیم شخصی ناظری در راستای یال SA که یال اول است بایستد بطوریکه پایش در S و سرش بطرف A باشد و وجه SBC را نگاه کند هرگاه یال دوم یعنی SB در طرف راست و یال سوم یعنی SC در طرف چپ ناظر مزبور واقع باشد میگویند که جهت کنج S ABC مستقیم است

ثالثاً هر گاه طول هردو حامل $\vec{V}$ و $\vec{V'}$ مساوی با واحد باشد حاصلضرب حاملی $\vec{V}\wedge\vec{V'}$ مساویست با $\sin(\vec{V}$ و $\vec{V'})$

۹۴۶ - قضیه - اگر یکی از دوعامل یك حاصلضرب حاملی را در یك عدد جبری مانند k ضرب کنیم حاصلضرب حاملی در آن عدد جبری ضرب میشود.

اگر عدد جبری k مثبت باشد جهت حاملها تغییر نمی‌پذیرد وجهت $\vec{OG}$ نیز تغییر نمیکند اما چون طول OG در k ضرب میشود حامل $\vec{OG}$ نیز در عدد k ضرب میشود.

اگر عدد جبری k منفی باشد جهت حاملی که در k ضرب میشود تغییر میکند و بنابراین جهت حامل $\vec{OG}$ نیز تغییر میکند و چون طول حامل $\vec{OG}$ در $|k|$ ضرب میشود حامل $\vec{OG}$ نیز در عدد جبری k ضرب میشود.

۹۴۷- نتیجه- اگر دوعامل یك حاصلضرب حاملی را در دوعدد جبری ضرب کنیم حاصلضرب حاملی در آن دوعدد ضرب میشود.

کافیست دومرتبهٔ متوالی قضیهٔ ۹۴۶ را بکار بریم:

$$(k\vec{V})\wedge(k'\vec{V'})=k[\vec{V}\wedge(k'\vec{V'})]=kk'(\vec{V}\wedge\vec{V'})$$

۹۴۸ - ثابت میکنند که:

$$(\vec{U}_1+\vec{U}_2)\wedge(\vec{V}_1+\vec{V}_2)$$

$$=\vec{U}_1\wedge\vec{V}_1+\vec{U}_1\wedge\vec{V}_2+\vec{U}_2\wedge\vec{V}_1+\vec{U}_2\wedge\vec{V}_2$$

پایان

فهرست بخش دوم

مقالهٔ هشتم	صفحه
۱- بعضی	۱
۲- هذلولی	۳۶
۳- سهمی	۶۱
۴- خاصیت‌های مشترك مقطع‌های مخروطی	۷۶
۵- فصل مشترك سطح مخروطی دوار با یك صفحه	۸۴
مسائل مقالهٔ هشتم	۹۴

مقالهٔ نهم	صفحه
۱- یادآوری تعاریف	۹۸
۲- تصویر روی یك خط راست	۱۰۵
۳- تصویر روی یك صفحه	۱۰۹
۴- مجموع هندسی چندحامل	۱۱۱
۵- حاصلضرب عددی دوحامل	۱۲۱
۶- حاصلضرب حاملی دوحامل	۱۲۴

کتابخانه
محمد اعظم رستم

فهرست اسامی بعض کتابهاییکه مورد استفاده قرار داده‌ایم

۱ ـ التفهیم لاوائل صناعة التنجیم تألیف استاد ابوریحان محمدبن احمد بیرونی (با تصحیح و مقدمه و شرح و حواشی استاد محترم جناب آقای جلال همائی)

2 – Leçons de Géométrie élémentaire par Jacques Hadamard (2 volumes)

3 – Traité de Géométrie par C. Guichard (2 volumes)

4 – Leçons de Géométrie par H. Commissaire

5 – Grand Mémento Larousse (Tome second)

6 – Géométrie par R. Deltheil et D. Caire

7 – Cours de Géométrie par P. Chenevier (3 volumes)

8 – Géométrie par Maillard et Millet (3 volumes)

9 – Cours de Géométrie par R. Estève et H. Mitault (3 volumes)

10 – Géométrie plane et dans l'espace par C. Lebossé et C. Hémery (2 volumes)

11 – Géométrie par F. Brachet et J. Dumarqué (3 volumes)

12 – Géométrie par A. Benoit (3 volumes)

13 – Eléments de géométrie par Ch. Vacquant et A. Macé de Lépinay

14 – Exercices de Géométrie par Th. Caronnet (9 volumes)

15 – Géométrie par R. Cluzel et J. P. Robert (4 volumes)

16 – Exercices de Géométrie Moderne par G. Papelier (8 volumes)

17 – Géométrie par G. Leconte (3 volumes)

سفاری ـ قربانی

حل المسائل هندسه

در ۲ جلد

در این دو کتاب علاوه بر مسائلی که در هندسهٔ سال اول تا چهارم بعنوان تمرین داده شده است تمام مسائل امتحانات نهایی سال پنجم متوسطه و دانشسراهای مقدماتی و عدهٔ زیادی مسائل ترکیبی دیگر مطابق برنامهٔ سال پنجم ودانشسراها حل شده است

دوجلد حل المسائل هندسه در پانصد و شصت صفحه شامل متجاوز از هفتصدو پنجاه مسئله حل‌شده ضامن موفقیت دانش‌آموزان درامتحانات داخلی ونهایی است

بهای هرجلد ۵۰ ریال است

فهرست تألیفات آقایان ابوالقاسم قربانی و حسن صفاری

دورهٔ هندسه

۱ - جلد اول برای سال اول دبیرستانها
۲ - « دوم « دوم «
۳ - « سوم « سوم «
٤ - « چهارم « چهارم «
۵ - هندسهٔ فضایی برای سال پنجم دبیرستانها و دانشسراهای مقدماتی
۷ - هندسهٔ مسطحه برای دانشسراهای مقدماتی و **سال ششم ریاضی**
۸ - **مخروطات و حاملها** برای سال ششم ریاضی
هیئت برای سال پنجم دبیرستانها و دانشسراهای مقدماتی

دورهٔ حساب

۹ - جلد اول برای سال اول دبیرستانها
۱۰ - « دوم « دوم «
۱۱ - حساب استدلالی برای دانشسراهای مقدماتی و سال ششم ریاضی

دورهٔ جبر

۱۲ - جلد اول برای سال دوم دبیرستانها
۱۳ - « دوم « « سوم «
۱٤ - « سوم « « چهارم «
۱۵ - کتاب جبر برای سالهای پنجم و ششم (ریاضی و طبیعی)
۱٦ - **جبر برای دانشسراهای مقدماتی**

دورهٔ مثلثات

۱۷ - جلد اول برای سال چهارم دبیرستانها
۱۸ - جلد دوم « « پنجم «
۱۹ - جبر و مثلثات
۲۰ و ۲۱ - حل المسائل [illegible] تا پنجم دبیرستانها
در دو جلد
۲۲ - حل المسائل [illegible] آقای ابوالقاسم قربانی
۲۳ - **روش حل مسائل هندسه** برای دانش‌آموزان دبیرستانها
۲٤ - جدولهای لگاریتم
۲۵ - حل المسائل جبر جلد اول برای سالهای دوم و سوم و چهارم دبیرستانها
۲٦ - رسم فنی برای دورهٔ دوم دبیرستانها
۲۷ - هندسهٔ دبستان
۲۸ و ۲۹ - حساب دبستان در دو جلد
۳۰ - نه مقالهٔ هندسهٔ در یك جلد

کتابخانه آیت الله بروجردی(ره)
830129

فهرست تألیفات آقایان ابوالقاسم قربانی و حسن صفاری

دورهٔ هندسه

۱ - جلد اول برای سال اول دبیرستانها
۲ - « دوم « دوم «
۳ - « سوم « سوم «
٤ - « چهارم « چهارم «
۵ - هندسهٔ فضایی برای سال پنجم دبیرستانها و دانشسراهای مقدماتی
۷ - هندسهٔ مسطحه برای دانشسراهای مقدماتی و **سال ششم ریاضی**
۸ - **مخروطات و حاملها** برای سال ششم ریاضی
هیئت برای سال پنجم دبیرستانها و دانشسراهای مقدماتی

دورهٔ حساب

۹ - جلد اول برای سال اول دبیرستانها
۱۰ - « دوم « دوم «
۱۱ - حساب استدلالی برای دانشسراهای مقدماتی و سال ششم ریاضی

دورهٔ جبر

۱۲ - جلد اول برای سال دوم دبیرستانها
۱۳ - « دوم « « سوم «
۱٤ - « سوم « « چهارم «
۱۵ - کتاب جبر برای سالهای پنجم و ششم (ریاضی و طبیعی)
۱٦ - **جبر برای دانشسراهای مقدماتی**

دورهٔ مثلثات

۱۷ - جلد اول برای سال چهارم دبیرستانها
۱۸ - جلد دوم « « پنجم «
۱۹ - جبر و مثلثات
۲۰ و ۲۱ - حل المسائل [illegible] تا پنجم دبیرستانها
در دو جلد
۲۲ - حل المسائل [illegible] آقای ابوالقاسم قربانی
۲۳ - **روش حل مسائل هندسه** برای دانش‌آموزان دبیرستانها
۲٤ - جدولهای لگاریتم
۲۵ - حل المسائل جبر جلد اول برای سالهای دوم و سوم و چهارم دبیرستانها
۲٦ - رسم فنی برای دورهٔ دوم دبیرستانها
۲۷ - هندسهٔ دبستان
۲۸ و ۲۹ - حساب دبستان در دو جلد
۳۰ - نه مقالهٔ هندسهٔ در یك جلد

کتابخانه آیت الله بروجردی(ره)
830129